

---

# LE CERF-VOLANT D'UNE CONSTELLATION

par

PATRICK POPESCU-PAMPU

---

**Résumé.** — On considère un point lisse  $O$  d'une surface analytique complexe  $S$ . Une *constellation* basée en  $O$  est un ensemble de points infiniment voisins de  $O$ , centres d'une suite d'éclatements de points au-dessus de  $O$ . Les constellations finies sont codées habituellement de deux manières : soit à l'aide d'un *diagramme d'Enriques*, soit à l'aide du *graphe dual* du diviseur obtenu en éclatant les points de la constellation. Il s'agit de deux arbres décorés, codant complètement la combinatoire de la constellation. Des algorithmes de passage de l'un à l'autre sont connus, mais ils ne permettent pas de se représenter géométriquement leur relation. Nous associons à une constellation un complexe simplicial géométrique de dimension deux, appelé son *cerf-volant*, muni d'une structure affine, et nous prouvons qu'il contient canoniquement le diagramme d'Enriques et le graphe dual. De plus les décorations de ces deux arbres s'expriment très simplement en termes de la géométrie affine du cerf-volant. Ceci permet de comprendre géométriquement les relations entre les deux graphes, ainsi que leurs relations avec l'arbre valuatif de Favre et Jonsson, qui peut être interprété en tant que graphe dual de la constellation de tous les points infiniment voisins de  $O$ . En fait, les cerf-volants des constellations finies se recollent en un cerf-volant infini qui est muni d'un feuilletage de dimension 1 dont l'espace des feuilles est l'arbre valuatif. La transition vers les calculs de fractions continues est assurée par des plongements partiels des cerf-volants dans un complexe simplicial canoniquement associé à une base d'un réseau, son *lotus*. Cette dernière notion est brièvement exposée en toutes dimensions.

## 1. Introduction

Depuis le travail fondateur [21] de Max Noether, divers problèmes de géométrie birationnelle des surfaces ou des courbes planes ont été étudiés à l'aide de la notion de *point infiniment voisin* d'un point lisse donné sur une surface. La première étude systématique de cette notion dans un traité de géométrie algébrique semble être celle faite par Enriques et Chisini [10].

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 14E05, 32S25.

**Mots clefs.** — Points infiniment voisins, diagrammes d'Enriques, graphes duaux, arbres valuatifs, fractions continues, structures affines, géométrie birationnelle.

En géométrie birationnelle apparaissent naturellement des suites d'éclatements centrés en des points infiniment voisins de points lisses de surfaces. Si tous ces éclatements sont effectués au-dessus d'un unique point  $O$ , leurs centres forment ce que Campillo, González-Sprinberg & Lejeune-Jalabert [4] appelèrent une *constellation* de points infiniment voisins de  $O$ . Il est important de bien comprendre la géométrie des constellations, en particulier comment les points se suivent les uns les autres lors des processus d'éclatements successifs les faisant apparaître.

Dans [10] (voir aussi [7]) fut introduit un arbre enraciné, appelé depuis *diagramme d'Enriques*, qui retient exactement le processus précédent : ses sommets correspondent bijectivement aux points de la constellation, la racine correspondnat à  $O$ , et l'on relie deux sommets si l'un des points correspondants apparaît en éclatant l'autre. De plus, les arêtes sont de deux types, soit courbes, soit droites, et dans une suite d'arêtes droites s'éloignant de la racine de l'arbre, on dit à chaque pas si l'on va tout droit ou si l'on part transversalement. Avec ces décorations, le diagramme d'Enriques code complètement la combinatoire de la constellation.

Ultérieurement fut introduit un autre diagramme codant différemment la combinatoire de la constellation : le *graphe dual* du diviseur obtenu en éclatant tous les points de la constellation (voir [2] et [27]). Dans ce cas, ce sont les sommets qui sont décorés (par les auto-intersections des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel qui leur correspondent).

Les descriptions précédentes montrent que les sommets des deux graphes sont naturellement en correspondance bijective. Mais de cette manière les arêtes ne se correspondent pas. D'autre part, comme les deux diagrammes contiennent la même information, on peut en principe passer de l'un à l'autre. Des algorithmes de passage ont été décrits, utilisant tous des calculs de fractions continues (voir [3]). Mais ils ne permettent pas de *penser géométriquement* le lien entre les deux graphes.

Dans cet article je décris une manière de visualiser simultanément le diagramme d'Enriques et le graphe dual. Pour cela, j'associe à chaque constellation un complexe simplicial géométrique de dimension deux, dont certains points sont distribués en types. Je l'appelle *le cerf-volant de la constellation*, composé de pièces élémentaires triangulaires - *les voiles élémentaires* - et de segments - *les cordes*, recollées lors d'un jeu d'assemblage dicté par le procesus d'éclatement menant au déploiement complet de la constellation par éclatements successifs. Certaines cordes se retrouvent recollées à l'intérieur des voiles élémentaires, les autres flottant librement. L'union des voiles élémentaires forme *la voilure* du cerf-volant de la constellation. Celle-ci peut être munie canoniquement d'une structure affine recollant celles des voiles élémentaires. Tout ceci est expliqué dans les sections 2–5.

Le théorème principal de cet article (Théorème 6.2) montre que *le diagramme d'Enriques et le graphe dual se plongent naturellement dans le cerf-volant*. Plus précisément, le diagramme d'Enriques est isomorphe au graphe formé par les cordes et le diagramme dual à une partie du bord de la voilure. De plus, les deux types de décorations s'interprètent en termes très simples à l'aide de la structure affine du cerf-volant. En particulier, les arêtes droites du diagramme d'Enriques correspondent aux cordes internes, et elles vont tout droit selon la convention d'Enriques et Chisini si et seulement si elles forment une géodésique pour la structure affine de la voilure !

Dans la Section 7 j'explique le lien de la notion de cerf-volant avec l'arbre valuatif de Favre et Jonsson [11]. Plus précisément, les voilures de toutes les constellations finies se recollent en un

complexe simplicial infini, la voilure du *firmament* de  $O$ , c'est-à-dire de la constellation de tous les points infiniment voisins de  $O$ . Cette voilure peut être munie naturellement d'un feuilletage de dimension 1, dont l'espace des feuilles est l'arbre valuatif.

Jusqu'à présent, le passage d'un graphe à l'autre était décrit à l'aide de fractions continues. Ces calculs peuvent eux aussi être interprétés à l'aide du cerf-volant. Pour cela, j'introduis dans la Section 8 la notion de *lotus* associé à une base d'un réseau bidimensionnel. Il s'agit d'un complexe simplicial bidimensionnel infini dont la structure permet de 'voir' les développements en fractions continues et dans lesquels se plongent les voilures des cerf-volants. Dans la Section 9 j'explique brièvement une extension de la notion de lotus en dimension quelconque, ainsi que la généralisation de la notion de fraction continue suggérée par cette extension.

**Remerciements.** Je remercie Charles Favre pour ses explications concernant l'arbre valuatif, Evelia García Barroso pour les longues discussions que nous avons eues au sujet du vocabulaire marin et céleste de cet article, Bernard Teissier pour m'avoir suggéré le nom de 'lotus', ainsi que Monique Lejeune-Jalabert pour ses remarques sur une version préliminaire de cet article.

## 2. Constellations de points infiniment voisins

Dans cette section j'explique les notions de base de *points infiniment voisins*, de *points proches*, d'*astres*, de *firmament* et de *constellations*.

Dans tout ce qui suit nous travaillerons avec des surfaces analytiques complexes lisses. Mais nos considérations se transposent sans aucun changement au cas des surfaces algébriques lisses sur un corps algébriquement clos, pourvu que tous les points soient interprétés comme des points fermés.

Soit  $(S, O)$  un germe de surface lisse. Notons par  $\mathcal{O}_{S,O}$  son algèbre locale et par  $F_{S,O}$  le corps des fractions de  $\mathcal{O}_{S,O}$ . Soit :

$$(S_O, E_O) \xrightarrow{\pi_O} (S, O)$$

le morphisme d'éclatement du point  $O$ . Les points de la courbe exceptionnelle  $E_O := \pi_O^{-1}(O)$  sont appelés *les points infiniment voisins de  $O$  à hauteur 1*, ou bien *les points directement proches de  $O$* .

**Définition 2.1.** — Si  $(\Sigma, E) \xrightarrow{\pi} (S, O)$  est un morphisme composé d'éclatements de points, alors un point du diviseur exceptionnel réduit  $E := \pi^{-1}(O)$  est appelé **un point infiniment voisin** de  $O$ .

En associant à chaque point infiniment voisin de  $O$  la valuation divisorielle de  $F_{S,O}$  qui calcule la multiplicité au point respectif, on définit naturellement une relation d'équivalence sur l'ensemble des points infiniment voisins de  $O$  sur les divers éclatés  $(\Sigma, E)$  de  $(S, O)$ . Par la suite, lorsque l'on parlera de points infiniment voisins, il s'agira d'une classe d'équivalence de points identifiés de la manière précédente. On dira qu'une surface  $(\Sigma, E)$  obtenue par une suite d'éclatements au-dessus de  $O$  et telle que  $E$  contient un représentant de la classe d'équivalence est *un modèle contenant le point infiniment voisin*.

On dit qu'un point infiniment voisin de  $O$  est à *hauteur*  $d > 0$  s'il est directement proche d'un point à hauteur  $d - 1$ . Il est dit *proche de*  $O$  si dans un modèle  $\Sigma$  il se trouve sur la transformée stricte sur  $\Sigma$  de  $E_O$  (on utilise ici le fait qu'un morphisme  $\pi$  non-trivial se factorise nécessairement par l'éclatement  $\pi_O$  de  $O$ ). Ceci est alors vrai pour tout modèle le contenant.

**Remarque 2.2.** — La notion de point infiniment voisin a été introduite (sous l'appellation *unendliche nahe einander ...*) par Max Noether dans [21], afin d'étudier les singularités des courbes algébriques planes à l'aide de suites d'éclatements successifs. Les notions de points infiniment voisins et de points proches ont été utilisées par Enriques et Chisini [10] pour formuler des conditions de passage par des points bases pour les systèmes linéaires de courbes planes. Ultérieurement, Zariski [28] les a reformulées dans le langage des idéaux et les a utilisées pour étudier les idéaux primaires pour l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{S,O}$ . Pour une introduction à ces aspects on pourra consulter l'article de survol [19] de Lejeune-Jalabert.

**Définition 2.3.** — Notons par  $\mathcal{C}_O$  l'ensemble des points infiniment voisins de  $O$ , en incluant  $O$  lui-même. Nous appellerons ses éléments des **astres**,  $\mathcal{C}_O$  étant le **firmament** de  $O$ .

La hauteur peut être vue comme une fonction :

$$H : \mathcal{C}_O \rightarrow \mathbb{N}.$$

La relation de proximité s'étend naturellement à  $\mathcal{C}_O$  tout entier. Chaque astre  $A \in \mathcal{C}_O \setminus O$  est proche d'un ou de deux autres astres. Afin d'étudier les deux possibilités, considérons un modèle  $(\Sigma, E) \xrightarrow{\pi} (S, O)$  contenant  $A$ .

- Si  $A$  se trouve sur une seule composante irréductible  $E_i$  de  $E$ , on l'appelle un *astre libre*. Il est proche uniquement de l'astre  $A_i$  dont l'éclatement crée  $E_i$ . Nous notons  $p_D(A) := A_i$ , et nous appelons ce point le *prédécesseur direct* de  $A$ .

- Si  $A$  se trouve sur deux composantes  $E_i$  et  $E_j$  de  $E$ , on l'appelle un *astre satellite*. Dans ce cas,  $A$  est proche de deux autres astres  $A_i \neq A_j$  dont les éclatements créent  $E_i$  et  $E_j$  respectivement. L'un d'entre eux - supposons qu'il s'agit de  $A_i$  - est nécessairement proche de l'autre -  $A_j$ . Nous notons  $p_D(A) := A_i$ ,  $p_I(A) := A_j$  et nous appelons  $A_i$  le *prédécesseur direct* de  $A$  et  $A_j$  le *prédécesseur indirect* de  $A$ .

Étendons les définitions précédentes en posant  $p_D(O) := O$ . Nous obtenons ainsi une application surjective :

$$p_D : \mathcal{C}_O \longrightarrow \mathcal{C}_O.$$

Elle vérifie  $H \circ p_D = H - 1$  sur  $\mathcal{C}_O \setminus O$  et  $H(O) = 0$ . Les fibres de  $p_D$  au-dessus d'un astre sont les points directement proches de celui-ci, à l'exception de  $O$ , pour qui la fibre  $p_D^{-1}(O)$  contient aussi l'astre  $O$  lui-même.

Nous pouvons reformuler de la manière suivante la définition d'une *constellation* donnée par Campillo, González-Sprinberg et Lejeune-Jalabert dans [4] et [5] :

**Définition 2.4.** — Une **constellation** centrée en  $O$  est un sous-ensemble  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_O$  qui est stable sous l'application  $p_D$ .

Par la suite nous nous restreindrons uniquement à des constellations *finies* centrées en  $O$ .

**Remarque 2.5.** — On peut penser au couple  $(S, O)$  comme à une représentation visuelle d'un point brillant sur le ciel. Jadis on interprétait un tel point comme étant une étoile, mais avec l'avènement des lunettes astronomiques puis des télescopes de plus en plus puissants, on a appris à y voir des amas d'autres points brillants, pouvant être eux-mêmes des galaxies ou des étoiles. C'est pour cette raison que j'utilise le terme *astre*, ne voulant pas préjuger de sa nature en l'appelant *étoile*. De plus, une constellation est une configuration particulière d'astres, ce qui montre que le vocabulaire que j'utilise s'adapte bien à celui introduit par Campillo, González-Sprinberg et Lejeune-Jalabert. En fait, ces derniers étudièrent des constellations en dimension quelconque (on pourra consulter pour l'état de l'art à ce sujet le survol [6]). Je voudrais remarquer aussi qu'un vocabulaire à connotations célestes a aussi été utilisé par Hironaka [15]. Mais sa notion d'*étoile* est différente de celle d'*astre* et ce qu'il appelle *voûte étoilée* est différent du *firmament*.

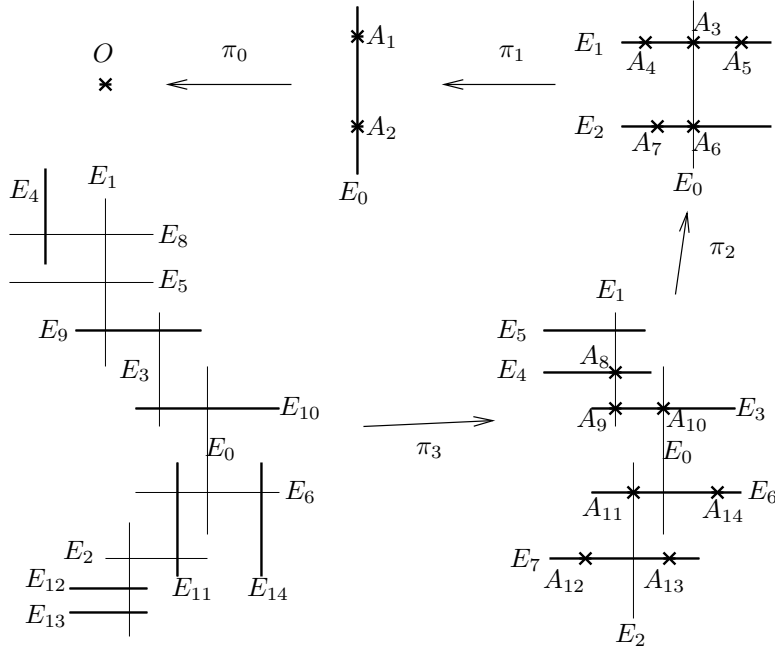


FIGURE 1. Une constellation et sa suite d'éclatements

À la constellation finie  $\mathcal{C}$  nous pouvons associer le morphisme biméromorphe :

$$(2.6) \quad \pi_{\mathcal{C}} : (S_{\mathcal{C}}, E_{\mathcal{C}}) \rightarrow (S, O)$$

obtenu en éclatant successivement les astres de  $\mathcal{C}$  selon leur hauteur : on démarre à  $i = 0$  et à chaque étape  $i \geq 0$  on éclate tous les astres de  $\mathcal{C}$  de hauteur  $i$ . Intuitivement, cela correspond à faire des zooms successifs au voisinage de chaque point brillant apparaissant par le zoom antérieur, pour voir si ce point correspond plutôt à une astre ou à un amas d'astres.

**Exemple 2.7.** — Dans la Figure 1 est représenté un exemple schématique de suite d'éclatements associée à une constellation  $\mathcal{C}$  de 15 astres infiniment voisins de  $O$ , y compris  $O$ . Les flèches indiquent des morphismes d'éclatements successifs,  $\pi_i$  étant l'éclatement simultané des astres de hauteur  $i$ . Les astres éclatés sont indiqués par des astérisques. Les composantes du diviseur exceptionnel apparues à chaque étape sont indiquées en traits gras. On numérote les astres différents de  $O$  par  $A_1, \dots, A_{14}$ . La composante créée par l'éclatement de  $A_i$  est notée  $E_i$ , la même notation servant pour toutes ses transformées strictes. L'application  $p_D : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  est donnée par :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} O & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ O & O & O & A_1 & A_1 & A_1 & A_2 & A_2 & A_4 & A_3 & A_3 & A_6 & A_7 & A_7 & A_6 \end{array}$$

Les astres libres sont  $A_1, A_2, A_4, A_5, A_7, A_{12}, A_{13}, A_{14}$  et les satellites sont  $A_3, A_6, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$ . Pour ces derniers, l'application  $p_I$  est donnée par :

$$\begin{array}{cccccc} A_3 & A_6 & A_8 & A_9 & A_{10} & A_{11} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ O & O & A_1 & A_1 & O & A_2 \end{array}$$

### 3. Le diagramme d'Enriques et le graphe dual d'une constellation

Dans cette section je rappelle les deux principaux codages de la combinatoire d'une constellation : son *diagramme d'Enriques* et son *graphe dual*.

Voici d'abord la définition du diagramme d'Enriques :

**Définition 3.1.** — Soit  $\mathcal{C}$  une constellation finie. Son **diagramme d'Enriques**  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  est le graphe décoré enraciné défini de la manière suivante :

- ses sommets sont en bijection avec les astres de  $\mathcal{C}$  ; sa racine correspond à  $O$ .
- deux sommets sont reliés par une arête lorsqu'ils représentent des astres dont l'un est directement voisin de l'autre.
- une arête est **courbe** si l'astre supérieur est libre ; sinon elle est **droite** ; deux arêtes droites successives vont tout droit lorsque leurs deux astres supérieurs ont même prédécesseur indirect ; sinon, elles forment une ligne brisée ; une arête droite sortant d'une arête courbe a la même tangente que celle-ci au sommet commun ; tous les autres couples d'arêtes successives forment une ligne brisée.

Les règles précédentes ont été décrites dans [10] afin de permettre de dessiner le diagramme dans le plan. Mais il faut bien voir qu'elles décrivent en fait uniquement une structure

supplémentaire sur un graphe abstrait, sans privilégier un plongement plan par rapport à un autre.

La distance géodésique d'un sommet de  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  à  $O$  est égale à la hauteur de l'astre correspondant. Orientons chaque arête de son sommet le plus bas (dit *sommet initial*) vers son sommet le plus haut (dit *sommet terminal*). Il est immédiat de voir que l'on a les règles suivantes pour lire sur le diagramme d'Enriques  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  les fonctions  $p_D$  et  $p_I$  :

**Proposition 3.2.** — *Un sommet  $A$  de  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  correspond à un astre satellite si et seulement si l'arête qui y aboutit est droite. Dans ce cas,  $p_D(A) = B$ , où  $B$  est le sommet initial de l'arête aboutissant à  $A$  et  $p_I(A) = C$ , où :*

1.  *$C$  est le sommet initial de l'arête aboutissant à  $B$  si cette arête et  $BA$  forment une ligne brisée ;*
2. *sinon,  $C$  est le sommet le plus bas sur la géodésique joignant  $B$  à  $O$ , tel que la géodésique  $CB$  ne soit pas brisée.*

**Exemple 3.3.** — Dans la figure 2 est représenté le diagramme d'Enriques de la constellation de la Figure 1. Grâce à la Proposition 3.2, on vérifie les valeurs de  $p_I$  données dans l'Exemple 2.7.

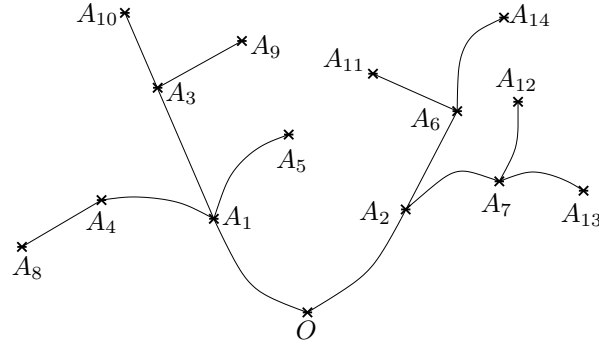


FIGURE 2. Le diagramme d'Enriques de la constellation de la Figure 1

Un deuxième type de graphe décoré est utilisé pour représenter la combinatoire d'une constellation. Sa définition utilise le morphisme (2.6) :

**Définition 3.4.** — Soit  $\mathcal{C}$  une constellation finie. Son **graphe dual**  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  est le graphe dual du diviseur réduit  $E_{\mathcal{C}}$  de la surface lisse  $S_{\mathcal{C}}$ , chaque sommet étant pondéré par l'auto-intersection de la composante irréductible qui lui correspond.

Rappelons que ces auto-intersections peuvent se calculer récursivement lors du processus d'éclatements, en utilisant le fait que lorsqu'on éclate un point sur une courbe compacte lisse  $\Gamma$ , et que l'on désigne par  $\Gamma_1$  sa transformée stricte, on a :

$$\Gamma_1^2 = \Gamma^2 - 1.$$

**Exemple 3.5.** — Dans la Figure 3 est représenté le graphe dual associé à la constellation de la Figure 1. Les sommets sont numérotés par les composantes irréductibles de  $E_{\mathcal{C}}$  qu'ils représentent, et ils sont pondérés par les auto-intersections respectives.

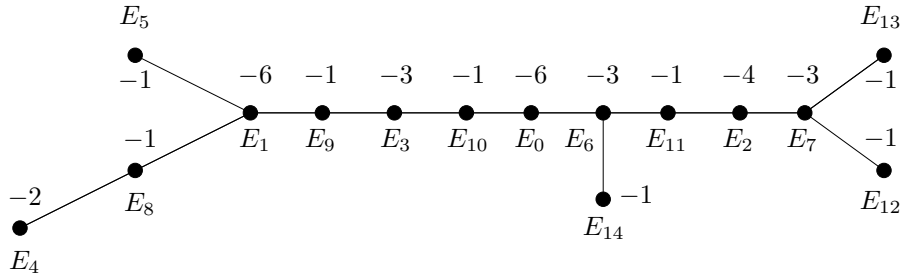


FIGURE 3. Le graphe dual de la constellation de la Figure 1

**Remarque 3.6.** — Le graphe dual d'un diviseur réduit sur une surface lisse est considéré en passant par Du Val [9]. Mais il ne semble avoir commencé à être utilisé systématiquement qu'à la suite de l'article [20] de Mumford et de la présentation [16] qui en a été faite par Hirzebruch.

Les sommets des graphes  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  sont en bijection naturelle : on associe au sommet de  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  représentant l'astre  $A$  le sommet de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  représentant la courbe exceptionnelle obtenue en éclatant  $A$ . Cette bijection ne respecte pas les structures des deux graphes. En fait, ceux-ci ne sont en général même pas abstraitement isomorphes, comme on le voit en comparant les figures 2 et 3. Néanmoins, ils codent tous les deux la même information : il est possible de donner des *algorithmes* permettant de passer de l'un à l'autre (voir [7] ou [3]).

L'un des buts de cet article est de faciliter la compréhension *géométrique* de la relation entre les deux graphes.

L'idée de base est de représenter chaque astre d'une constellation par *deux* points distincts : un premier le représentant en tant que point fermé sur l'un des modèles, et un deuxième représentant le diviseur exceptionnel créé par l'éclatement de ce point fermé. De plus, chaque fois que le point fermé sera vu comme intersection de deux courbes lisses transverses, on aura un triangle affine canoniquement associé à ce diviseur à croisements normaux et un plongement canonique des deux points dans le triangle.

Expliquons cela avec plus de détails. Soit  $(E \cup E', A) \hookrightarrow \Sigma$  un germe de diviseur à croisements normaux sur une surface lisse  $\Sigma$ . C'est-à-dire que  $E$  et  $E'$  sont deux germes en  $A$  de courbes lisses



transverses. Notons par  $E_A$  le diviseur exceptionnel de l'éclatement de  $A$  dans  $\Sigma$ . On associe au diviseur à croisements normaux  $(E \cup E', A)$  un triangle affine dont les sommets correspondent bijectivement aux courbes  $E, E', E_A$  et le milieu du segment  $[E, E']$  au point  $A$ . À l'astre  $A$  correspondent de cette manière *deux* points privilégiés dans le triangle,  $A$  et  $E_A$  (voir la Figure 4). On peut penser que  $A$  représente la courbe  $E_A$  sous forme embryonnaire, et que le segment qui les relie dans le triangle représente l'embryogénèse.

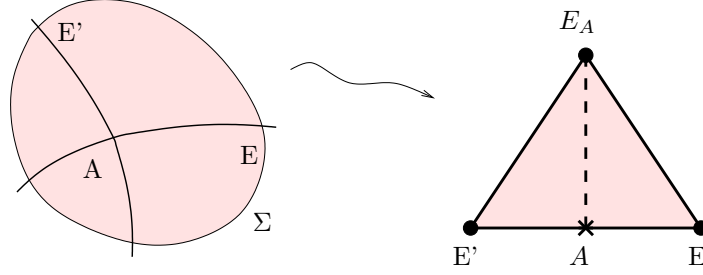


FIGURE 4. Le triangle associé à un diviseur à croisements normaux

Lorsque l'on considère le processus d'éclatements associé à une constellation, on se retrouve avec une suite de germes de diviseurs à croisements normaux : les germes des diviseurs exceptionnels des composés d'éclatements aux astres satellites de la constellation. On associe à chacun d'entre eux un triangle comme précédemment. Ces divers triangles se recollent ensuite naturellement. Plus de soin doit être accordé aux astres libres, pour lesquels on a seulement des *demi-triangles*.

#### 4. Construction des voilures et des cerf-volants

Dans cette section j'explique les définitions de deux types de complexes simpliciaux géométriques bidimensionnels connexes, les *voilures* et les *cerf-volants*. Ces définitions sont récursives, par rajouts de pièces élémentaires triangulaires appelées les *demi-voiles* et les *voiles simples* et de segments appelés les *cordes*, le tout rattaché à un segment initial appelé l'*axe* du cerf-volant. Les structures affines des voiles simples et des demi-voiles se recollent canoniquement, comme expliqué dans la Section 5. Le lien avec les constellations est quant à lui expliqué dans la Section 6.

La définition suivante introduit des termes permettant de parler en termes intuitifs des pièces du jeu de construction de cerf-volants et de leurs règles de recollement.

**Définition 4.1.** — (voir la Figure 5) Une **demi-voile** est un triangle affine ayant un sommet **étoilé** et deux sommets **pleins**, l'un d'entre eux étant **de base** et l'autre **terminal**. Le **côté latéral** de la demi-voile est celui qui joint les deux sommets pleins.

Une **voile simple** est un triangle affine dont tous les sommets sont **pleins**, l'un d'entre eux étant **terminal** et les deux autres étant **de base**. De plus, ces derniers sont ordonnés : on parlera du premier et du deuxième sommet de base. Le côté joignant les deux sommets de base est **la base** et son milieu est **le point étoilé** de la voile. Les côtés joignant le sommet terminal à l'un des sommets de base sont appelés **côtés latéraux**.

On dira que les demi-voiles et les voiles simples sont les **voiles élémentaires**.

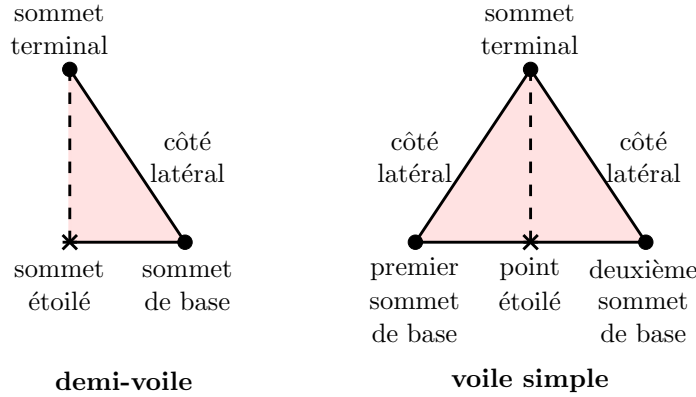


FIGURE 5. Les voiles élémentaires

Le vocabulaire précédent est motivé par le fait qu'une demi-voile est affinement isomorphe aux moitiés des voiles simples obtenues en joignant le point étoilé au sommet terminal par le segment affine qui les relie. Dans les dessins, nous représenterons ces segments par des traits hachurés. Ce sont eux qui matérialiseront la correspondance bijective naturelle entre points étoilés et sommets pleins dans les complexes simpliciaux que nous construirons.

Les cordes et l'axe ont aussi leurs sommets décorés en types :

**Définition 4.2.** — Une **corde** est un segment affine dont l'un des sommets est **initial** et l'autre **final**. L'**axe** est un segment affine dont l'un des sommets est **étoilé** et l'autre est **plein**.

En ayant à notre disposition un kit de construction formé d'un seul axe, mais de demi-voiles et de voiles simples à volonté, nous pouvons assembler des *voilures* plus compliquées par un processus de construction dont les étapes élémentaires sont :

1. On part de l'axe, considéré comme une voilure dégénérée.
2. Si  $\mathcal{V}$  est une voilure déjà construite, on peut au choix :
  - (a) prendre une nouvelle demi-voile et recoller son sommet de base à un sommet plein de  $\mathcal{V}$  (voir la Figure 6) ;
  - (b) prendre une nouvelle voile simple et recoller sa base à un côté latéral de  $\mathcal{V}$  par l'unique isomorphisme affine qui envoie le deuxième sommet de base de la nouvelle voile simple sur le sommet terminal de la voile élémentaire à laquelle appartient le côté latéral. On remplace ainsi un côté latéral de l'ancienne voilure par deux nouveaux côtés latéraux (voir la Figure 7).

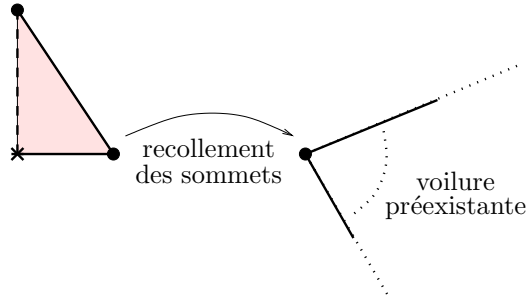


FIGURE 6. Rattachement d'une demi-voile

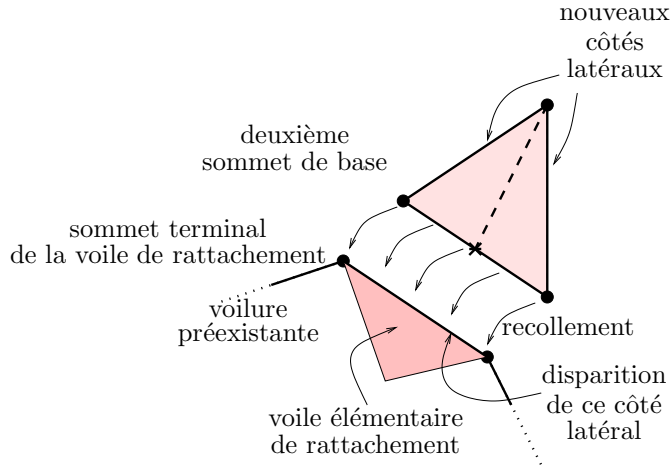


FIGURE 7. Rattachement d'une voile simple

Si l'on enlève les sommets d'une voilure  $\mathcal{V}$ , celle-ci se décompose en composantes connexes. Appelons *voile complète* l'adhérence de chacune de ces composantes connexes dans la voilure  $\mathcal{V}$ . L'une de ces voiles complètes est l'axe de la voilure. Chacune des autres voiles complètes est un complexe simplicial purement bidimensionnel homéomorphe à un disque, ayant une unique demi-voile, le reste des triangles étant des voiles simples.

**Exemple 4.3.** — Dans la Figure 13 est représentée une voilure. Cette voilure a 8 voiles complètes en dehors de l'axe, 5 d'entre elles étant réduites à une demi-voile, les 3 restantes ayant 1, 2 et respectivement 3 voiles simples dans leur constitution.

Chaque voile complète *s'oriente canoniquement* de la manière suivante :

- on oriente la demi-voile initiale en choisissant l'ordre suivant des sommets : sommet de base, sommet terminal, sommet étoilé ;

- on propage cette orientation par continuité à toute la voile complète.

Ceci permet de parler de *côté latéral droit* et de *côté latéral gauche* de chaque voile simple : le côté droit est celui que l'on rencontre en tournant positivement lorsque l'on sort de la base. Lorsque l'on recolle une voile simple à une autre, on peut donc dire si le recollement se fait *sur le côté droit* ou *sur le côté gauche*. Considérons une suite de voiles simples  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  recollées les unes aux autres dans cet ordre. Si les recollements sont toujours effectués du même côté, on dira que ces voiles *tournent dans le même sens*. Cette notion peut s'étendre au cas où l'on part d'une demi-voile et que le recollement se fait continuellement sur le côté droit.

À chaque voilure  $\mathcal{V}$  on associe canoniquement un *cerf-volant*  $\mathcal{KV}$ . Pour cela, lors de la construction de  $\mathcal{V}$  on *attache une corde en même temps qu'on recolle une voile élémentaire*. Ceci se fait de la manière suivante :

- (a) si l'on recolle une *demi-voile*, on attache aussi une corde en identifiant son sommet final au sommet étoilé de la demi-voile et son sommet initial au sommet étoilé ou au point étoilé qui correspond au sommet plein auquel a été attachée la demi-voile. On dira qu'il s'agit d'une **corde libre** du cerf-volant (voir la Figure 8).

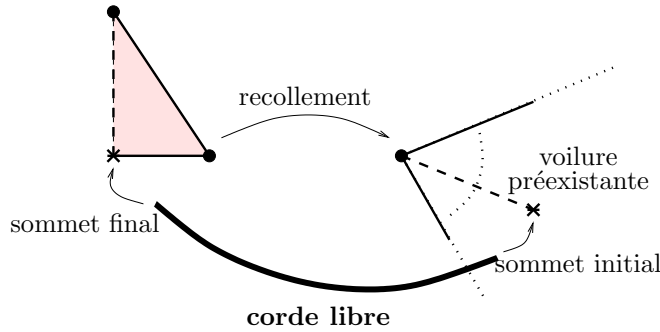


FIGURE 8. Rattachement d'une corde libre

- (b) si l'on recolle une *voile simple*, notons par  $\tau$  la voile élémentaire de  $\mathcal{V}$  à laquelle on la rattache, par  $B$  son sommet terminal, par  $C$  le sommet de base tel que le segment  $BC$  soit celui le long duquel la nouvelle voile simple est attachée et par  $M$  le point étoilé de  $\tau$ . On recolle alors une corde le long du segment joignant  $M$  au milieu du segment  $BC$ , par un isomorphisme affine qui envoie le sommet initial de la corde sur  $M$ . On dira qu'il s'agit d'une **corde satellite** du cerf-volant (voir la Figure 9).

**Exemple 4.4.** — Dans la Figure 14 est représenté le cerf-volant associé à la voilure de la Figure 13. Comme la figure est plane, certaines cordes libres - que l'on représentera toujours par des lignes courbes - sont parfois obligées pour des raisons topologiques d'être représentées intersectant la voilure ailleurs qu'en leurs extrémités. C'est ici le cas de la corde joignant  $A_6$  et  $A_{14}$ . Quant aux cordes  $A_1A_5$  et  $A_7A_{12}$ , on aurait pu les dessiner sans de telles intersections,

mais on a préféré montrer que ces intersections supplémentaires ne nuisent pas tellement à la lisibilité de la figure, une fois l'œil entraîné.

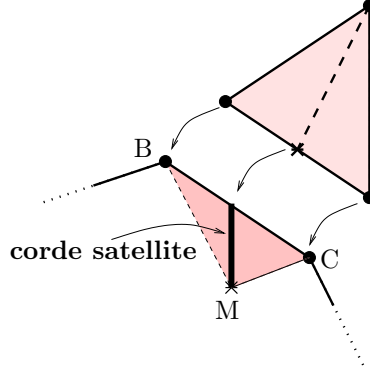


FIGURE 9. Rattachement d'une corde satellite

## 5. Modèle affine canonique des voiles complètes

Dans cette section j'explique comment associer canoniquement à chaque base d'un réseau bidimensionnel un complexe simplicial de dimension deux plongé dans le cône convexe engendré - son *lotus*. Puis j'explique comment plonger canoniquement chaque voile complète d'une voilure dans le lotus. Ce plongement définit un *recollement canonique* des structures affines des voiles élémentaires constituant chaque voile complète.

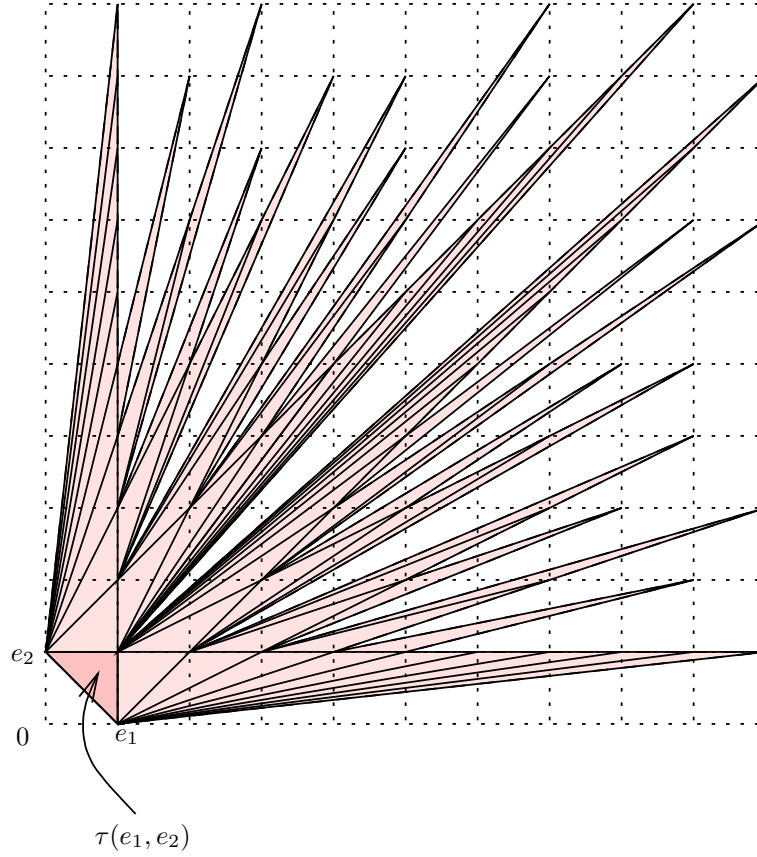
Considérons un réseau bidimensionnel  $N$  (c'est-à-dire un groupe abélien libre de rang 2) et une base  $(e_1, e_2)$  de ce réseau. Notons par  $\sigma(e_1, e_2)$  le cône convexe engendré par la base dans l'espace vectoriel réel  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  associé. Notons par  $\tau(e_1, e_2)$  le triangle qui est contenu dans le plan réel  $N_{\mathbb{R}}$  et qui joint les points  $e_1, e_2, e_1 + e_2$ .

Cette construction peut être ensuite répétée à partir des bases  $(e_1, e_1 + e_2)$  et  $(e_2, e_1 + e_2)$  de  $N$ . Ainsi, de proche en proche, on construit un complexe simplicial infini plongé dans le cône  $\sigma(e_1, e_2)$  : à la  $n$ -ème étape de construction, on rajoute  $2^n$  triangles à ceux déjà construits. Dans la Figure 10 est représentée l'union de tous les triangles de ce complexe simplicial contenus dans le parallélogramme engendré par  $10e_1, 10e_2$ . À cause de cette forme, Bernard Teissier m'a suggéré :

**Définition 5.1.** — Le complexe simplicial précédent est appelé **le lotus**  $\mathcal{L}(e_1, e_2)$  associé au cône  $\sigma(e_1, e_2)$ .

Je dirai aussi, en filant la métaphore, que les triangles sont les *pétales* du lotus.

Bien sûr, à transformations affines préservant les réseaux près, il n'y a qu'un seul lotus.

FIGURE 10. Le lotus  $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ 

**Remarque 5.2.** — Considérons la variété torique affine de réseau des poids  $N$  et d'éventail formé par le cône  $\sigma(e_1, e_2)$  et ses faces. Elle est isomorphe à  $\mathbb{C}^2$ , munie de sa structure torique canonique. Considérons la suite des éclatements des orbites de dimension 0. C'est une suite de morphismes toriques, obtenue en subdivisant successivement les cônes de dimension 2 de l'éventail de l'étape précédente. Si on dessine à chaque fois le triangle ayant comme sommets les deux vecteurs primitifs des arêtes d'un cône de dimension 2 et celui de l'arête le subdivisant, on obtient exactement les pétales du lotus. Le lotus permet donc de visualiser d'un seul coup d'œil la suite infinie des morphismes d'éclatement des orbites de dimension 0.

Considérons à présent une voile complète d'une voilure, différente de l'axe. Elle peut se plonger canoniquement dans le lotus  $\mathcal{L}(e_1, e_2)$  par une application qui identifie chaque voile simple à un pétale :

- on plonge la demi-voile dans  $\sigma(e_1, e_2)$  par l'unique transformation affine qui envoie le sommet étoilé en  $\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ , le sommet de base en  $e_1$  et le sommet terminal en  $e_1 + e_2$ .
- on plonge la voile simple recollée le long du côté latéral de la demi-voile en envoyant son premier sommet de base sur  $e_1$ , son deuxième sommet de base sur  $e_1 + e_2$  et son sommet terminal sur  $2e_1 + e_2$ .
- chaque nouvelle voile simple se plonge en respectant les incidences.

Grâce à ce plongement, on obtient *une structure affine entière canonique* sur chaque voile complète. Le fait que la structure soit *entière* signifie ici simplement que l'on sait dire quels sont les points entiers : ce sont exactement les sommets des voiles simples. Mais le sommet étoilé de la demi-voile initiale n'est que demi-entier !

**Exemple 5.3.** — Dans la Figure 11 est représenté un exemple de voile complète et son plongement affine canonique dans le lotus. L'unique demi-voile est mise en évidence à l'aide d'un motif spécial.

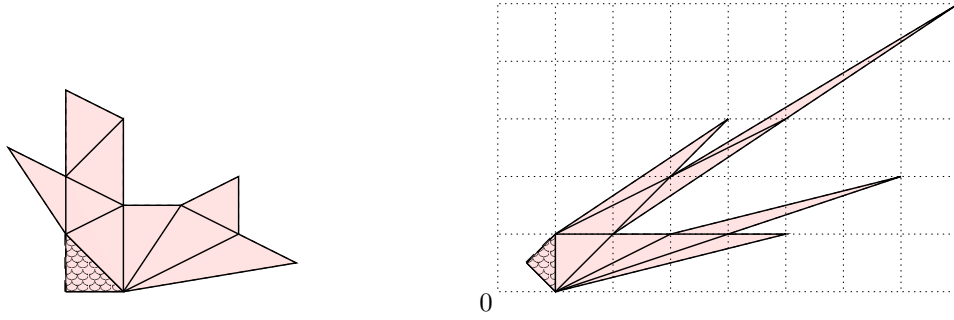


FIGURE 11. Une voile complète et son plongement affine canonique dans le lotus

Grâce à l'existence de ce plongement canonique, cela a un sens de dire qu'une ligne polygonale contenue dans une voile complète *va tout droit* (c'est-à-dire que c'est une géodésique pour la structure affine du recollement) ou non. Ceci permet d'exprimer en termes affines le fait qu'une suite de pétales tourne dans le même sens :

**Proposition 5.4.** — *À l'intérieur de l'une des voiles complètes d'une voilure, on considère une suite de voiles élémentaires  $\tau_1, \dots, \tau_n$  telle que deux voiles successives soient adjacentes et construites dans cet ordre. Alors elles tournent toujours dans le même sens si et seulement si la suite des cordes satellites associées est une géodésique pour la structure affine canonique de la voile complète.*

**Exemple 5.5.** — Cette proposition est illustrée dans la Figure 12 pour la voile complète de la Figure 11. La proposition précédente permet de repérer sur la voile complète représentée combinatoirement (à gauche) les cordes satellites alignées dans le plongement canonique dans le

lotus (à droite). Il est important de savoir faire cette reconnaissance sur une voilure déformée, car lorsque le nombre de voiles croît, très rapidement le plongement affine canonique devient impossible à dessiner à cause de l'allongement des triangles.

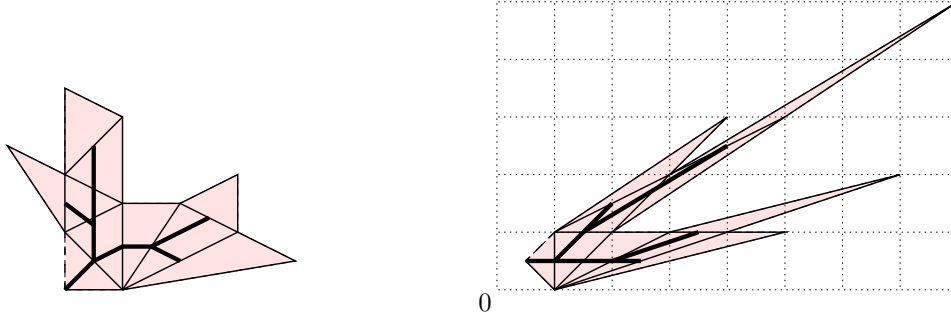


FIGURE 12. Cordes satellites d'une voile complète

**Remarque 5.6.** — Considérons à l'intérieur de chaque pétale du lotus  $\mathcal{L}(e_1, e_2)$  les deux segments joignant le milieu de sa base aux milieux des côtés. Leur union est un arbre binaire plongé dans  $\sigma(e_1, e_2)$ . Décorons chaque sommet étoilé  $\frac{1}{2}(a_1 e_1 + a_2 e_2)$  par la fraction  $\frac{a_1}{a_2}$ . On obtient ainsi un arbre isomorphe à l'arbre de Stern-Brocot décrit dans [13, page 116]. Ce dernier arbre représente géométriquement la construction des suites de Farey par itération de l'opération  $(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}) \rightarrow \frac{m+m'}{n+n'}$ , en partant de la suite  $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$ , et en considérant à chaque étape les couples successifs de la suite construite à l'étape précédente. Il est construit en reliant chaque nouvelle fraction à celle ayant été créée en dernier parmi les deux lui ayant donné naissance.

## 6. Le diagramme d'Enriques et le graphe dual d'une constellation comme sous-arbres du cerf-volant

Dans cette section j'explique comment associer à chaque constellation finie une voilure, donc aussi un cerf-volant. Puis je montre comment lire le graphe dual de la constellation à partir de la voilure et le diagramme d'Enriques à partir du cerf-volant (voir Théorème 6.2). En fait le graphe dual est canoniquement isomorphe à une partie du bord de la voilure et le diagramme d'Enriques est isomorphe au cordage du cerf-volant.

Notons par  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_O$  une constellation finie et par  $\mathcal{C}' \supset \mathcal{C}$  une constellation qui contient un astre de plus  $A \in \mathcal{C}_O$ . Expliquons comment construire la voilure  $\mathcal{V}(\mathcal{C}')$  de  $\mathcal{C}'$  à partir de celle  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$ . Le procédé de construction est exactement le même que celui décrit dans la Section 4 pour les voilures abstraites. Nous utiliserons la même numérotation :



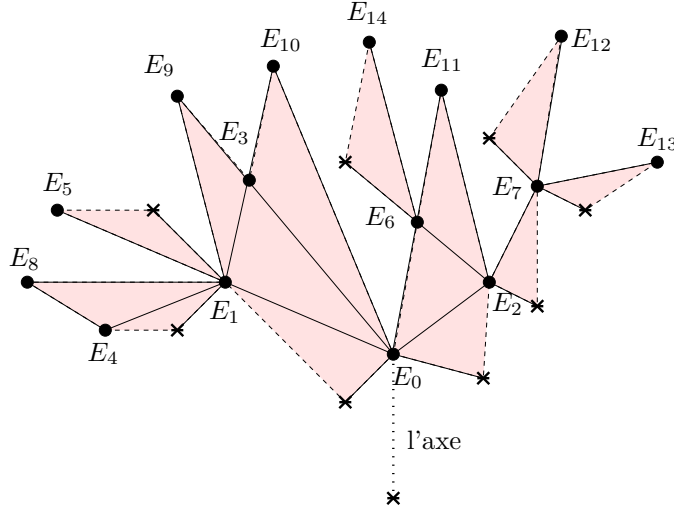


FIGURE 13. La voilure de la constellation de la Figure 1

1. Si  $\mathcal{C} = O$ , alors  $\mathcal{V}(\{O\})$  est réduit à l'axe. On note par  $I(O)$  le sommet initial de l'axe et par  $T(O)$  le sommet terminal.
2. Si  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , alors nous avons deux cas :
  - (a) Si  $A$  est un astre libre et que  $B = p_D(A)$ , on colle une demi-voile  $v(A)$  à  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  en identifiant son sommet de base à  $T(B)$ . On note par  $I(A)$  le sommet étoilé de la demi-voile et par  $T(A)$  son sommet terminal, vus comme points de la voilure obtenue après recollement.
  - (b) Si  $A$  est un astre satellite et que  $B = p_D(A), C = p_I(A)$ , on colle une voile simple  $v(A)$  à  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  en recollant sa base au côté latéral  $BC$  de  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  par l'unique isomorphisme affine qui envoie le deuxième sommet de base de la voile simple sur  $B$ . On note par  $I(A)$  le point étoilé de la nouvelle voile simple et par  $T(A)$  son sommet terminal, vus comme points de la voilure obtenue après recollement.

Comme à chaque voilure est associé canoniquement un cerf-volant, on obtient aussi le cerf-volant  $\mathcal{KV}(\mathcal{C})$  de la constellation  $\mathcal{C}$ .

**Exemple 6.1.** — Dans la Figure 13 est représentée la voilure de la constellation dont la suite associée d'éclatements a été schématisée dans la Figure 1. Dans la Figure 14 est représenté le cerf-volant associé.

Le théorème suivant explique comment retrouver le diagramme d'Enriques et le graphe dual d'une constellation à partir du cerf-volant associé. Sa preuve est récursive, en regardant ce qui se passe à chaque étape d'éclatement.

**Théorème 6.2.** — Soit  $\mathcal{C}$  une constellation finie centrée en  $O$ .

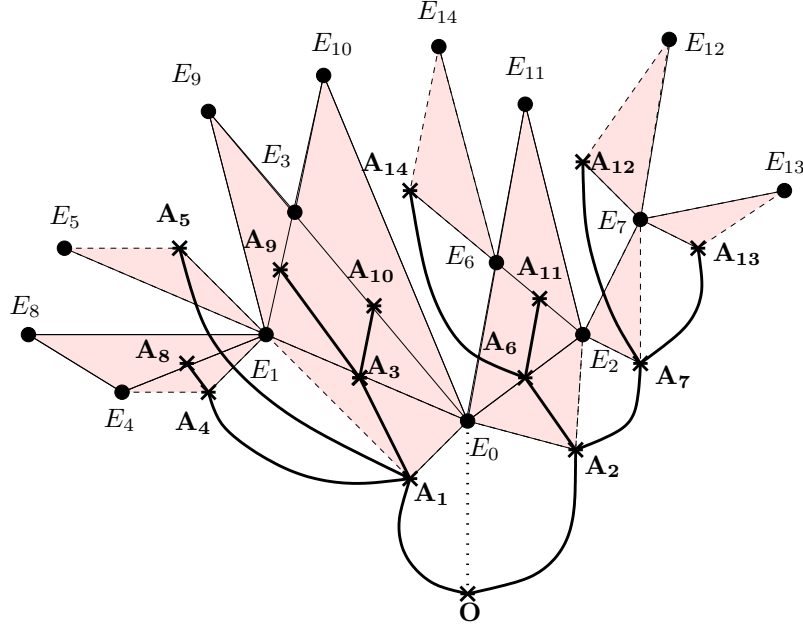


FIGURE 14. Le cerf-volant de la constellation de la Figure 1

1. Le diagramme d'Enriques  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  est isomorphe au cordage du cerf-volant  $\mathcal{KV}(\mathcal{C})$  de la constellation par un isomorphisme qui envoie chaque astre  $A$  de  $\mathcal{C}$  dans  $I(A)$ . Les côtés courbes de  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  correspondent aux cordes libres de  $\mathcal{KV}(\mathcal{C})$ . Les segments droits maximaux de  $\mathcal{E}(\mathcal{C})$  correspondent aux segments droits maximaux dans la réalisation affine canonique des voiles complètes de la voilure  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$ .
2. Le graphe dual  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  est isomorphe au graphe obtenu comme union des côtés latéraux de la voilure  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  par un isomorphisme qui envoie chaque astre  $A$  de  $\mathcal{C}$  dans  $T(A)$ . L'auto-intersection d'une composante du diviseur exceptionnel correspondant à un sommet plein  $v$  de  $\mathcal{KV}(\mathcal{C})$  est égale à l'opposé du nombre de voiles élémentaires arrivant en  $v$ , l'axe  $y$  compris.

Remarquons aussi que deux sommets pleins de  $\mathcal{KV}(\mathcal{C})$  sont reliés par une arête si et seulement si, lors du processus d'éclatement des astres de  $\mathcal{C}$ , on trouve un modèle sur lequel les centres des deux valuations divisorielles associées se rencontrent.

**Exemple 6.3.** — Pour l'exemple récurrent de cet article, le diagramme d'Enriques est visible sur la Figure 14 : c'est le cordage du cerf-volant. Les arcs courbes et droits sont visibles directement. Pour déterminer les segments qui vont tout droit, on utilise la Proposition 5.4. On voit alors que la ligne polygonale  $A_1A_3A_{10}$  est droite, mais que  $A_2A_6A_{11}$  ne l'est pas, ce qui est conforme à la Figure 2. Quant au graphe dual, nous l'avons représenté en traits gras sur la

Figure 15. À côté de chaque sommet est écrit le nombre de voiles élémentaires  $y$  aboutissant, l'axe  $y$  compris. On vérifie ainsi que l'on obtient bien le graphe de la Figure 3.

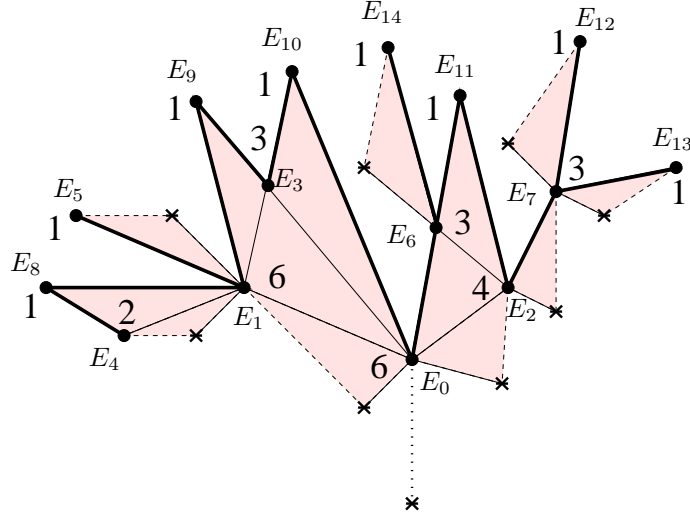


FIGURE 15. Plongement du graphe dual dans la voilure de la constellation de la Figure 1

Avoir plongé à la fois le diagramme d'Enriques et le graphe dual dans le même espace de manière à lire localement dans cet espace leurs structures supplémentaires (arêtes allant tout droit, auto-intersections) permet d'enrichir la compréhension de tout algorithme de passage de l'un à l'autre. En effet, étant donnée une partie de l'un des graphes, on peut déterminer ainsi de quelle partie de l'autre graphe dépend sa structure.

## 7. Interprétation valuative

Les voilures correspondant à toutes les constellations finies centrées en  $O$  peuvent être canonicquement recollées. L'on obtient alors la voilure  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_O)$  du firmament  $\mathcal{C}_O$  tout entier. On peut lui donner une interprétation valuative, analogue à celle de l'arbre valuatif de Favre et Jonsson [11]. De plus, il y a une manière naturelle de projectifier  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_O)$  pour obtenir cet arbre valuatif. C'est ce que nous allons voir dans cette section.

Dans ce qui suit, pour abrégé nous noterons  $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{S,O}$ ,  $F := F_{S,O}$ . Soit  $\mathcal{M}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$ .

**Définition 7.1.** — Étendons la relation d'ordre usuelle de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  en posant  $\infty > \lambda$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Une **valuation de  $F$  dominant  $O$**  est une fonction  $\nu : F \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  telle que :

1.  $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$  pour tous  $x, y \in F$  ;

2.  $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$  pour tous  $x, y \in F$ ;
3.  $\nu(\lambda) := \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \in \mathbb{C}^* \\ \infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$  ;
4.  $\nu(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$ .

Notons par  $\mathcal{V}_{S,O}$  l'ensemble des valuations de  $F$  dominant  $O$  et par  $\mathcal{A}_{S,O}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{V}_{S,O}$  des valuations normalisées par la condition :

$$(7.2) \quad \min \nu(\mathcal{M}) = 1.$$

Comme l'expliquent Favre et Jonsson de manière détaillée dans [11], l'ensemble  $\mathcal{V}_{S,O}$  admet une topologie naturelle d'espace fonctionnel localement compact, qui fait du sous-espace topologique  $\mathcal{A}_{S,O}$  un *arbre réel* compact (d'où la notation  $\mathcal{A}$  pour le désigner).

Si  $A \in \mathcal{C}_O$ , notons par  $\nu_A$  la valuation divisorielle associée. Elle peut être définie des deux manières équivalentes suivantes, en partant d'un modèle  $(\Sigma, E) \xrightarrow{\pi} (S, O)$  contenant  $A$  :

- si  $f \in F$ , alors  $\nu_A(f)$  est la multiplicité de la fonction  $f \circ \pi$  au point  $A$ ;
- si  $f \in F$ , alors  $\nu_A(f)$  est l'ordre d'annulation de  $f \circ \pi \circ \pi_A$  le long de  $E_A$ , où  $\Sigma_A \xrightarrow{\pi_A} \Sigma$  est l'éclatement de  $A$  dans  $\Sigma$  et que  $E_A$  est le diviseur exceptionnel ainsi créé.

Reprenons les notations de la section précédente :  $\mathcal{C}$  désigne donc une constellation finie et  $A$  est un astre que l'on rajoute à  $\mathcal{C}$ . Nous expliquons à présent comment plonger canoniquement la voile élémentaire  $v(A)$  associée à  $A$  dans l'espace valuatif  $\mathcal{V}_{S,O}$ . Nous allons changer l'ordre considéré auparavant, en traitant d'abord le cas où  $A$  est *satellite*, ensuite celui où  $A$  est *libre* et enfin celui où  $A = O$ .

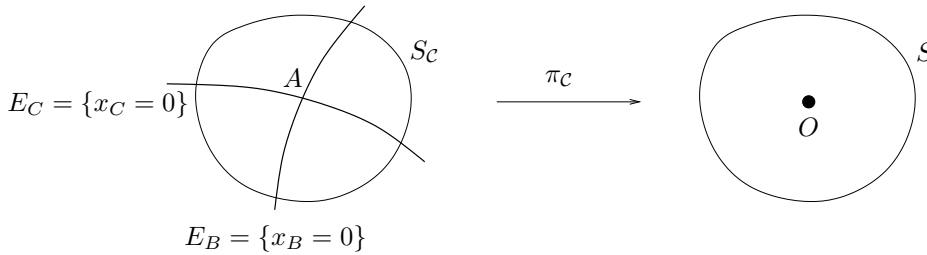


FIGURE 16. Le cas d'un astre satellite

• *Supposons que  $A$  est satellite* (voir la Figure 16). Avec les notations de l'équation (2.6), notons par  $E_B$  et  $E_C$  les transformées strictes sur la surface  $S_C$  des diviseurs exceptionnels obtenus en éclatant les points  $B = p_D(A)$ ,  $C = p_I(A)$ . Ces deux courbes s'intersectent transversalement au point  $A$ . Notons par  $N_A$  le réseau abstrait engendré par les valuations divisorielles  $\nu_B$  et  $\nu_C$ . Notons par  $(e_B, e_C)$  la base de  $N_A$  correspondant au couple  $(\nu_B, \nu_C)$ .

**Définition 7.3.** — Une valuation  $\nu \in \mathcal{V}_{S,O}$  est dite **monomiale** par rapport à  $\nu_B$  et  $\nu_C$  s'il existe  $(b, c) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus 0$  tels que pour tout  $f \in F^*$  :

$$\nu(f) = \min\{b \cdot m_B + c \cdot m_C \mid c_{m_B, m_C} \neq 0, f \circ \pi_C = \sum_{(m_B, m_C)} c_{m_B, m_C} x_B^{m_B} x_C^{m_C}\}$$

où  $(x_B, x_C)$  est un système de coordonnées locales au voisinage de  $A \in S_C$  tel que  $E_B, E_C$  soient définis par les équations  $x_B = 0$ , respectivement  $x_C = 0$ . Nous noterons par  $b \nu_B \oplus c \nu_C$  la valuation monomiale précédente.

Cette définition est indépendante du choix du système de coordonnées locales. Le nom est motivé par le fait que la valuation d'une fonction se détermine uniquement à partir des valuations  $\nu_B(x_B^{m_B} x_C^{m_C})$  et  $\nu_C(x_B^{m_B} x_C^{m_C})$  des monômes intervenant dans l'écriture de  $f \circ \pi_C$  dans le système de coordonnées  $(x_B, x_C)$ .

De cette manière, les notations étant celles du début de la Section 5, le cône  $\sigma(e_B, e_C)$  de l'espace vectoriel  $(N_A)_{\mathbb{R}}$  se plonge dans  $\mathcal{V}_{S,O}$ , en associant à chaque vecteur  $b \cdot e_B + c \cdot e_C$  la valuation monomiale  $b \nu_B \oplus c \nu_C$ . Notons par  $\sigma(\nu_B, \nu_C)$  son image. On prend comme voile élémentaire  $v(A)$  le triangle affine du plan  $(N_A)_{\mathbb{R}}$  de sommets  $e_B, e_C, e_B + e_C$ . Par le plongement précédent, il se réalise comme triangle dans  $\mathcal{V}_{S,O}$  de sommets  $\nu_B, \nu_C, \nu_B \oplus \nu_C$ . Le fait que les sous-triangles de l'espace topologique  $\mathcal{V}_{S,O}$  correspondant à  $v(A), v(B), v(C)$  se retrouvent recollés comme décrit dans la construction de la voilure  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  provient du lemme élémentaire suivant :

**Lemme 7.4.** — *On a l'égalité suivante de valuations :  $\nu_A = \nu_B \oplus \nu_C$ .*

• *Supposons que  $A$  est libre.* Notons par  $E_B$  la transformée stricte sur la surface  $S_C$  du diviseur exceptionnel obtenu en éclatant  $B = p_D(A)$ . C'est l'unique composante de  $E_C$  qui contient le point  $A$ . Dans ce cas on choisit une *curvette* passant par  $A$ , c'est-à-dire un germe de courbe lisse transverse à  $E_B$ . Cette curvette jouera le rôle de  $E_C$ . Notons par  $\nu_{curv} \in \mathcal{V}(\mathcal{C})$  la valuation divisorielle associée.

On fait la même construction que précédemment, le couple  $(\nu_B, \nu_{curv})$  de valuations jouant le même rôle que  $(\nu_B, \nu_C)$ . Cette fois-ci une partie des valuations monomiales  $b \nu_B \oplus c \nu_{curv}$  dépendent bien sûr du choix de la curvette, mais le point important est que la moitié du cône de ces valuations n'en dépend pas :

**Lemme 7.5.** — *L'intersection dans  $\mathcal{V}_{S,O}$  des cônes  $\sigma(\nu_B, \nu_{curv})$ , lorsque la curvette varie, est égale au cône  $\sigma(\nu_B, \nu_A)$ . Plus précisément, parmi les valuations de la forme  $b \nu_B \oplus c \nu_{curv}$ , celles vérifiant  $b \geq c$  sont exactement les valuations indépendantes du choix de la curvette, et coïncident avec les valuations du cône  $\sigma(\nu_B, \nu_A)$ .*

Ce lemme découle directement du Lemme 7.4.

En faisant la construction analogue à celle du cas précédent, on voit grâce à ce lemme que la demi-voile associée à l'astre libre  $A$  est le triangle affine de  $\mathcal{V}_{S,O}$  de sommets  $\frac{1}{2}\nu_A, \nu_A, \nu_B$ . Le sommet étoilé correspond à  $\frac{1}{2}\nu_A$ , le sommet terminal à  $\nu_A$  et le sommet de base à  $\nu_B$ .

• *Supposons que  $A = O$ .* Considérons un système quelconque de coordonnées centré en  $O$ . Il lui correspond un triangle affine, pétale initial du lotus associé. Lorsque l'on varie le système de coordonnées, l'intersection de tous ces pétales est égale au segment affine des valuations de la forme  $\lambda\nu_O$ , avec  $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ . On envoie bijectivement l'axe sur ce segment par l'unique application affine qui associe  $\frac{1}{2}\nu_A$  au sommet initial  $O$  et  $\nu_A$  au sommet terminal  $E_O$ .

En conclusion des considérations précédentes :

**Proposition 7.6.** — *La voilure d'une constellation se plonge canoniquement dans  $\mathcal{V}_{S,O}$  en préservant les structures affines des voiles complètes.*

On peut montrer que le cerf-volant se plonge aussi canoniquement dans le même espace. L'idée est de considérer pour chaque astre libre  $A$  contenue sur une composante  $E_i$  une curvette passant par  $A$  et un système de coordonnées centré en l'astre  $A_i$  d'ont l'un des axes de coordonnées soit l'image de cette curvette. On relie les valuations représentatives de  $A$  et  $A_i$  par un segment dans le plan des valuations monomiales par rapport à ce système de coordonnées, et on montre que ce segment est indépendant des choix.

Dans la suite de la section, pour chaque astre  $A$ , nous identifierons  $v(A)$  à un sous-triangle de  $\mathcal{V}_{S,O}$ . Il est plongé dans l'espace des valuations monomiales par rapport à  $(\nu_B, \nu_C)$  (si  $A$  est satellite) ou  $(\nu_A, \nu_B)$  (si  $A$  est libre). Traçons sur ce triangle le feuilletage  $\mathcal{F}_A$  obtenu en l'intersectant avec les droites partant de l'origine dans le cône des valuations monomiales correspondant. L'espace des feuilles s'identifie canoniquement (par intersection) à l'union des côtés latéraux de  $v(A)$ . Mais ces côtés latéraux sont des valuations normalisées par la condition (7.2). En recollant les feuilletages des voiles élémentaires de la voilure  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$ , on obtient un feuilletage  $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ . Les applications de passage au quotient par les feuilles se recollent en une application :

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\phi_{\mathcal{C}}} \mathcal{D}(\mathcal{C})$$

dans laquelle la voilure  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  est vue comme sous-espace de l'espace des valuations  $\mathcal{V}_{S,O}$  et le graphe dual  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  est vu comme sous-espace de l'arbre  $\mathcal{A}(\mathcal{C})$  des valuations normalisées.

Si on a une inclusion  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$  de constellations finies, on a des rétractions naturelles  $\mathcal{V}(\mathcal{C}') \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{C}') \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C})$  telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{C}'}} & \mathcal{D}(\mathcal{C}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{C}}} & \mathcal{D}(\mathcal{C}) \end{array}$$

On peut prendre alors les limites projectives des morphismes  $\phi_{\mathcal{C}}$ . Notons par :

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}_O) := \varprojlim \mathcal{V}(\mathcal{C})$$

*la voilure du firmament.* Comme la limite projective des graphes duaux  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  s'identifie à l'arbre valuatif  $\mathcal{A}(\mathcal{C})$  (voir [11]), on obtient :

**Proposition 7.7.** — *L'application de passage au quotient de la voilure  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_O)$  du firmament par le feuilletage limite projective des feuilletages  $\mathcal{F}(\mathcal{C})$  s'identifie naturellement à l'arbre valuatif  $\mathcal{A}_{S,O}$ .*

## 8. Le lotus et les fractions continues

Dans cette section j'indique comment interpréter géométriquement les développements en fractions continues des nombres positifs à l'aide du lotus. Cette interprétation est indispensable dès qu'on veut décrire le cerf-volant d'un germe de courbe plane en termes des exposants de Newton-Puiseux de ses branches (voir [12]).

Comme dans [23], j'utiliserai les notations suivantes pour les fractions continues *euclidiennes* (uniquement des signes +) et *de Hirzebruch-Jung* (uniquement des signes -) :

$$[x_1, x_2, \dots]^\pm := x_1 \pm \frac{1}{x_2 \pm \frac{1}{\dots}}.$$

Considérons à nouveau un réseau bidimensionnel  $N$ , muni d'une base  $(e_1, e_2)$ . Notons par  $D(e_1, e_2)$  la droite de  $N_{\mathbb{R}}$  qui joint les points  $e_1, e_2$ . Les couples de points entiers successifs sur cette droite sont de la forme  $((1-a)e_1 + ae_2, -ae_1 + (a+1)e_2)$ , où  $a \in \mathbb{Z}$ . Ils forment des bases de  $N$ .

Considérons à présent la droite passant par 0 et parallèle à la droite  $D(e_1, e_2)$  :

$$D_\infty(e_1, e_2) := \mathbb{R}(e_1 - e_2) \subset N_{\mathbb{R}}.$$

Notons par  $P(e_1, e_2)$  le demi-plan ouvert bordé par  $D_\infty(e_1, e_2)$  et contenant  $D(e_1, e_2)$ , puis par  $\Delta_0(e_1, e_2)$  le triangle de sommets 0,  $e_1, e_2$ . On a évidemment :

**Lemme 8.1.** — *L'union des cônes  $\sigma((1-a)e_1 + ae_2, -ae_1 + (a+1)e_2)$  pour  $a \in \mathbb{Z}$  est égale à  $P(e_1, e_2) \cup 0$ .*

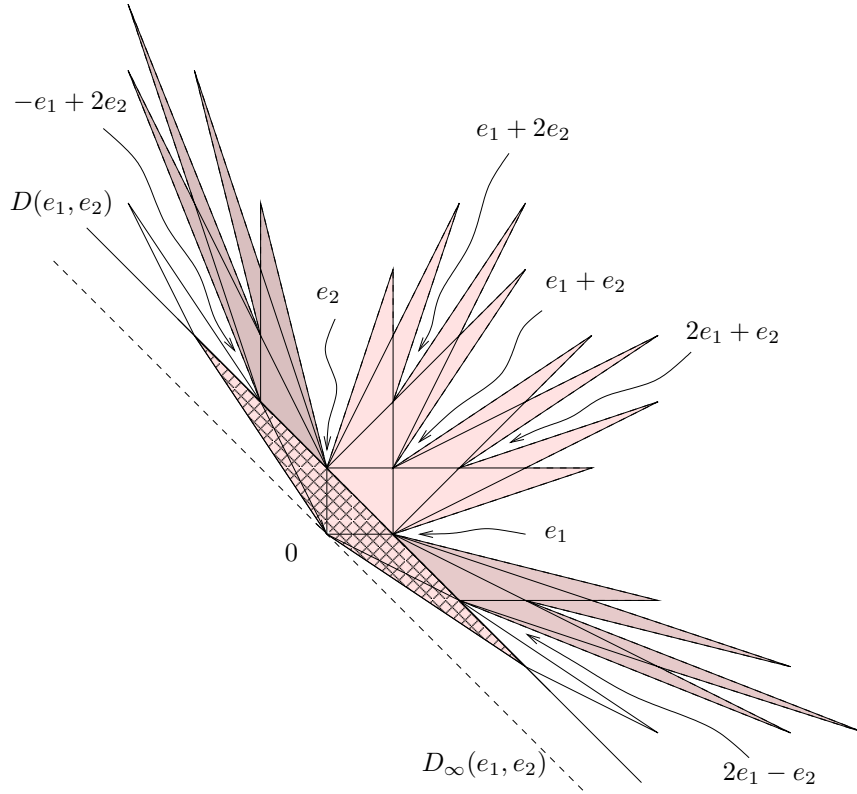
Introduisons alors :

**Définition 8.2.** — **Le grand lotus**  $\overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2)$  associé à la base  $(e_1, e_2)$  est l'union des lotus associés à tous les cônes du lemme précédent, ainsi que des triangles  $\Delta_0((1-a)e_1 + ae_2, -ae_1 + (a+1)e_2)$  (voir la Figure 17) :

$$\overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2) := \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} [\mathcal{L}((1-a)e_1 + ae_2, -ae_1 + (a+1)e_2) \cup \Delta_0((1-a)e_1 + ae_2, -ae_1 + (a+1)e_2)].$$

Les sommets du grand lotus forment l'ensemble  $\text{Prim}(P(e_1, e_2))$  des vecteurs primitifs du demi-plan ouvert  $P(e_1, e_2)$ , auquel on rajoute 0.

Considérons à présent  $\mathbb{H}(N_{\mathbb{R}})$ , le plan hyperbolique dont l'horizon est la droite projective réelle  $\mathbb{P}(N_{\mathbb{R}})$ .

FIGURE 17. Le grand lotus  $\overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2)$ 

**Remarque 8.3.** — Une construction canonique de  $\overline{\mathbb{H}}(N_{\mathbb{R}}) := \mathbb{H}(N_{\mathbb{R}}) \cup \mathbb{P}(N_{\mathbb{R}})$  peut être faite de la manière suivante. A chaque structure presque complexe  $J$  sur  $N_{\mathbb{R}}$  (c'est-à-dire un endomorphisme de  $N_{\mathbb{R}}$  vérifiant  $J^2 = -I$ ) on associe la décomposition  $N_{\mathbb{C}} = N_J^i \oplus N_J^{-i}$  en somme directe des espaces propres du complexifié  $J_{\mathbb{C}} : N_{\mathbb{C}} \rightarrow N_{\mathbb{C}}$  de  $J$ . Les droites complexes  $N_J^i$  et  $N_J^{-i}$  sont conjuguées par rapport à la conjugaison canonique  $u + iv \rightarrow u - iv$  de  $N_{\mathbb{C}} = N_{\mathbb{R}} + iN_{\mathbb{R}}$ . L'application  $J \rightarrow N_J^i$  identifie bijectivement l'ensemble des structures presque complexes sur  $N_{\mathbb{R}}$  avec l'ensemble des droites complexes imaginaires de  $N_{\mathbb{C}}$ . Ce dernier ensemble s'identifie à  $\mathbb{P}(N_{\mathbb{C}}) \setminus \mathbb{P}(N_{\mathbb{R}})$ , c'est-à-dire au complémentaire d'un cercle dans la sphère de Riemann  $\mathbb{P}(N_{\mathbb{C}})$ . Chacun des deux hémisphères ainsi délimités représente les structures presque complexes définissant l'une des deux orientations de  $N_{\mathbb{R}}$ . On considère alors sur chacun des hémisphères l'unique métrique hyperbolique définissant la même structure conforme. La conjugaison restreinte à  $\mathbb{P}(N_{\mathbb{C}}) \setminus \mathbb{P}(N_{\mathbb{R}})$  est une isométrie renversant l'orientation héritée de celle de  $\mathbb{P}(N_{\mathbb{C}})$ . On



peut donc définir  $\mathbb{H}(N_{\mathbb{R}})$  au choix, soit comme l'espace des  $J$  préservant une orientation fixée de  $N_{\mathbb{R}}$ , soit comme l'espace des couples non-ordonnés  $\{J, -J\}$ .

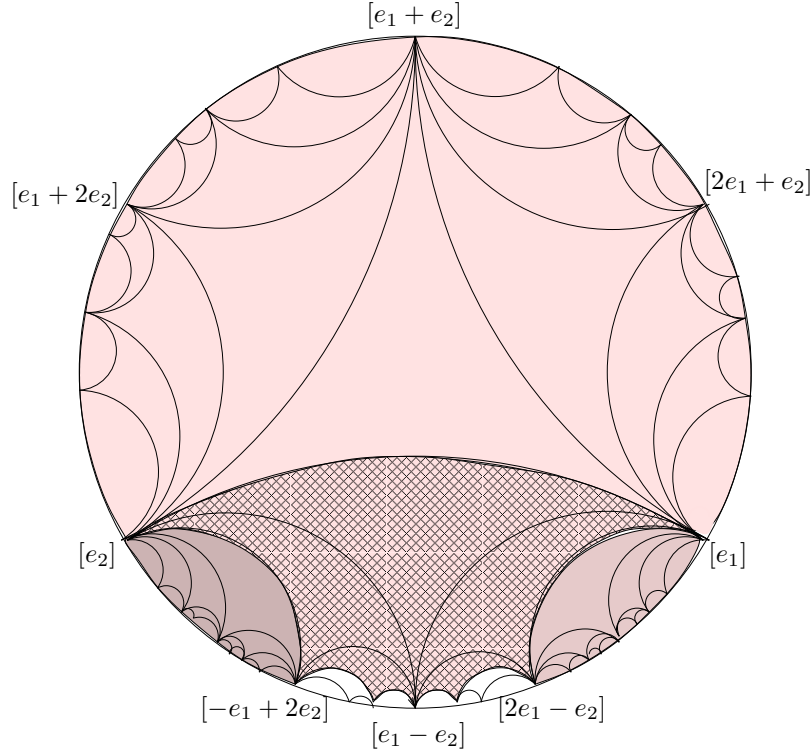


FIGURE 18. La triangulation modulaire  $\mathcal{M}(N)$

Pour chaque  $v \in N_{\mathbb{R}} \setminus 0$ , nous noterons par  $[v] \in \mathbb{P}(N_{\mathbb{R}})$  le point correspondant à la droite  $\mathbb{R}v$ . Pour chaque base  $(u, v)$  de  $N$ , soit  $L([u], [v])$  l'unique droite hyperbolique de  $H(N_{\mathbb{R}})$  qui joint  $[u]$  et  $[v]$ . Lorsque  $(u, v)$  varie parmi toutes les bases de  $N$ , on obtient des droites qui forment les arêtes d'une triangulation de  $\overline{H}(N_{\mathbb{R}}) := H(N_{\mathbb{R}}) \cup \mathbb{P}(N_{\mathbb{R}})$ , appelée *la triangulation modulaire*  $\mathcal{M}(N)$ . Le grand lotus est un plongement combinatoire de la triangulation modulaire dans  $N_{\mathbb{R}}$ , associée canoniquement à la base  $(e_1, e_2)$  :

**Proposition 8.4.** — *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \text{Prim}(P(e_1, e_2)) \cup 0 & \rightarrow & \mathbb{P}(N) \\ v \neq 0 & \rightarrow & [v] \\ 0 & \rightarrow & [e_1 - e_2] \end{array}$$

est une bijection qui envoie le grand lotus  $\overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2)$  en la triangulation modulaire  $\mathcal{M}(N)$ .

Dans la Figure 18 est représentée la triangulation modulaire. Dans les Figures 17 et 18 sont représentées avec les mêmes couleurs certains sous-complexes de  $\overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2)$  et leurs images par  $\Phi$ . En particulier, on voit que le lotus  $\mathcal{L}(e_1, e_2)$  correspond à la partie de la triangulation modulaire située dans le demi-plan hyperbolique bordé par la droite  $L([e_1], [e_2])$  et contenant  $[e_1 + e_2]$  dans son adhérence.

**Remarque 8.5.** — Dans certains travaux (voir entre autres [24], [25], [14], [17]), les fractions continues sont interprétées géométriquement à l’aide de la triangulation modulaire  $\mathcal{M}(N)$ . Par la proposition précédente, ces interprétations peuvent se faire de manière équivalente sur le grand lotus. Dans la suite de cette section, j’explique une interprétation différente, faite uniquement à l’aide du lotus, et ayant l’avantage de se généraliser en dimensions plus grandes (voir la Section 9). C’est une réinterprétation de celle de Klein (voir [18] et [23]), mais la généralisation qu’elle suggère en dimension plus grande est différente de celle proposée par Klein et reprise entre autres par Arnold [1].

Considérons une demi-droite  $l \subset N_{\mathbb{R}}$  d’origine 0 et contenue dans l’intérieur du cône  $\sigma(e_1, e_2)$ . Notons par  $G(l)$  l’union des pétales du lotus dont l’intérieur intersecte  $l$ . Nous dirons que  $G(l)$  est la *gaine* de  $l$ . On peut l’imaginer construite successivement en rajoutant des pétales  $\tau_1, \tau_2, \dots$  à  $\tau_0 := \tau(e_1, e_2)$ , au fur et à mesure que l’on s’éloigne de 0 le long de  $l$  : chaque fois que l’on entre dans un nouveau pétale, on le rajoute à la suite déjà construite. Considérons deux cas, suivant que  $l$  est rationnelle ou non.

- Si  $l$  est *rationnelle*, c’est-à-dire que  $l$  contient des éléments non-nuls du réseau  $N$ , notons par  $S(l)$  l’unique élément primitif de  $N$  contenu dans  $l$ . Le segment  $[0, S(l)]$  ne contient pas d’autre points de  $N$  à part ses extrémités, ce qui permet de montrer que :

$$[0, S(l)] = G(l) \cap l.$$

Dans ce cas,  $G(l)$  contient un nombre fini de pétales  $\tau_0, \dots, \tau_n$  et  $S(l)$  est un sommet de  $\tau_n$ . Pour  $i = 1, 2$ , notons par  $P_i(l)$  la ligne polygonale joignant  $e_i$  à  $S(l)$  et contenue dans le bord de  $G(l)$ .

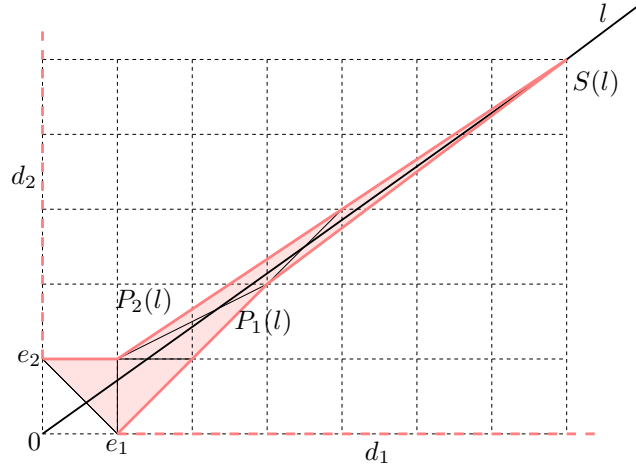
- Si  $l$  est *irrationnelle*, la suite  $\tau_0, \tau_1, \dots$  est infinie. Pour  $i = 1, 2$ , notons par  $P_i(l)$  la ligne polygonale contenue dans le bord de  $G(l)$ , partant de  $e_i$  et allant vers l’infini en s’éloignant toujours strictement de 0 (ou, de manière équivalente, la composante connexe de  $\partial G(l) \setminus ]e_1, e_2[$  contenant  $e_i$ ).

Notons par  $d_i$  la demi-droite fermée contenue dans la droite engendrée par le vecteur  $e_i$ , d’origine le point  $e_i$  et ne contenant pas 0. Posons aussi :

$$Q_i(l) := \begin{cases} d_i \cup P_i(l) \cup (l \setminus [0, S(l)]), & \text{si } l \text{ est rationnelle} \\ d_i \cup P_i(l), & \text{si } l \text{ est irrationnelle} \end{cases}$$

Associons aussi à chaque pétale  $\tau_i$  l’un des symboles ‘ $\delta$ ’ ou ‘ $\gamma$ ’, suivant que  $\tau_{i+1}$  est attaché du côté *droit* ou *gauche* de  $\tau_i$  et convenons que le symbole du dernier pétale (si  $l$  est rationnel) est le même que celui de l’avant-dernier.

**Exemple 8.6.** — Dans la Figure 19 est représentée la gaine de la demi-droite  $l$  passant par  $S(l) = 7e_1 + 5e_2$ . Elle est formée de 5 pétales.  $P_1(l)$  joint dans l’ordre les points  $e_1, 3e_1 + 2e_2, S(l)$

FIGURE 19. La gaine de la demi-droite rationnelle  $\mathbb{R}_+(7e_1 + 5e_2)$ 

et  $P_2(l)$  joint dans l'ordre les points  $e_2, e_1 + e_2, S(l)$ . Les symboles des pétales sont, dans l'ordre,  $\delta, \gamma, \gamma, \delta, \delta$ .

La proposition suivante relie la construction de la gaine à la construction géométrique de Klein lui permettant de donner une interprétation des fractions continues (voir [23]). On en déduit l'interprétation géométrique annoncée des fractions continues à l'aide du lotus. Rappelons que l'inclinaison de  $l$  dans la base  $(e_1, e_2)$  est le quotient  $x_1/x_2$ , si  $x_1e_1 + x_2e_2$  est un vecteur directeur de  $l$ .

- Proposition 8.7.** — 1. Pour chaque  $i \in \{1, 2\}$ , la ligne polygonale  $Q_i(l)$  est le bord de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points du réseau  $N$  contenus dans le cône strictement convexe de côtés  $\mathbb{R}_+e_i$  et  $l$ .
2. Regroupons les pétales  $\tau_0, \tau_1, \dots$  de la gaine  $G(l)$  en paquets maximaux de triangles successifs ayant le même symbole. On considère que le premier paquet est toujours formé de pétales tournant à droite. Désignons par  $a_1, a_2, \dots$  les cardinaux des paquets successifs. Alors, si  $\lambda$  désigne l'inclinaison de  $l$  dans la base  $(e_1, e_2)$ , on a :

$$\lambda = [a_1, a_2, \dots]^+.$$

**Remarque 8.8.** — Dans [23] j'ai expliqué que l'on pouvait comprendre la dualité des enveloppes convexes des points entiers situés dans deux cônes supplémentaires à l'aide d'un *diagramme en zig-zag*. Dans le cas où ces cônes sont celui de côtés  $\mathbb{R}_+(e_1 - e_2), l$  et celui de côtés  $l, \mathbb{R}_+(e_2 - e_1)$ , la ligne en zig-zag associée obtenue en partant du point  $e_1 - e_2$  est l'union du segment  $[e_1 - e_2, e_2]$  et des segments qui séparent à l'intérieur de la gaine  $G(l)$  les unions de pétales tournant dans le même sens. On pourra comparer ceci aux considérations de [14].

Au début de la section, le grand lotus a été associé à une base de  $N$ . Mais la seule chose qui compte dans sa construction c'est la donnée du demi-plan  $P(e_1, e_2)$  bordé par la droite  $D_\infty(e_1, e_2)$  qui le contient. En fait, on peut partir de n'importe quel demi-plan fermé  $P$  dont le bord  $D_\infty^P$  est une droite rationnelle. À l'intérieur de ce demi-plan on considère la droite  $D^P$  parallèle à  $D_\infty^P$  la plus proche de  $D_\infty^P$  qui contient des points de  $N$ . On considère alors sur  $D^P$  tous les couples de points successifs de  $N$  : ce sont des bases de  $N$ , qui permettent de construire le grand lotus  $\overline{\mathcal{L}}(P)$  associé à  $P$ , comme union des lotus qui leur correspondent.

Pour finir cette section, nous allons voir une relation entre le grand lotus et les fractions continues de Hirzebruch-Jung.

**Définition 8.9.** — Considérons une suite  $(v_0, v_1, \dots, v_{n+1})$  de vecteurs de  $N$ , avec  $n \geq 1$ . Cette suite est dite **admissible** si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. deux vecteurs successifs quelconques forment toujours une base de  $N$  ;
2. toutes ces bases définissent la même orientation de  $N_{\mathbb{R}}$  ;
3. tous ces vecteurs sont contenus dans un même demi-plan fermé bordé par la droite  $\mathbb{R}v_0$ .

Les propriétés géométriques précédentes peuvent se traduire numériquement. Plus précisément, on a la proposition élémentaire suivante :

**Proposition 8.10.** — Pour chaque  $i \in \{1, 2, 3\}$ , l'union des propriétés 1, ...,  $i$  est équivalente à l'union des propriétés 1', ...,  $i'$ , où :

1'.  $(v_0, v_1)$  est une base de  $N$  et pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $\epsilon_k \in \{+1, -1\}$  tel que  $v_{k-1} + \epsilon_k v_{k+1} = a_k v_k$ , avec  $a_k \in \mathbb{Z}$  ;

2'. de plus,  $\epsilon_k = +1$  pour tous les  $k \in \{1, \dots, n\}$  ;

3'.  $a_k > 0$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , dès que  $n \geq 2$  ;  $a_1 \geq 0$  pour  $n = 1$  ;  $[a_1, \dots, a_k]^- > 0$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  et  $[a_1, \dots, a_n]^- \geq 0$ .

De plus, deux suites admissibles de vecteurs sont isomorphes par une transformation linéaire des réseaux ambiants si et seulement si les suites d'entiers associées coïncident.

Ceci permet de parler de *suites admissibles d'entiers*  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ . La proposition précédente montre qu'une suite admissible d'entiers est un invariant complet des suites admissibles de vecteurs d'un réseau bidimensionnel, à isomorphismes de réseaux près.

Nous dirons que la suite admissible  $(v_0, \dots, v_{n+1})$  représente 0 si  $v_1 + v_{n+1} = 0$ . Ceci est équivalent au fait que la suite représentative  $(a_1, \dots, a_n)$  vérifie les conditions 1', 2', 3' précédentes et que de plus :

$$[a_1, \dots, a_n]^- = 0.$$

La proposition suivante fait le lien entre les suites admissibles représentant 0 et les triangulations des polygones par des diagonales. Elle peut se prouver par récurrence sur le nombre de vecteurs, à l'aide du fait que les suites admissibles représentant 0 s'obtiennent à partir de la suite (1, 1) par un processus d'éclatements (voir [22, Appendice]).

**Proposition 8.11.** — Soit  $(v_0, \dots, v_{n+1})$  une suite admissible représentant 0 et soit  $(a_1, \dots, a_n)$  la suite d'entiers associée. Notons par  $P$  l'unique demi-plan fermé contenant tous les vecteurs

de la suite. Soit  $\text{Pol}(v_0, \dots, v_{n+1})$  l'union du triangle  $0v_1v_n$  et des pétales du grand lotus  $\overline{\mathcal{L}}(P)$  dont les intérieurs intersectent l'un des segments  $]0, v_k]$ , pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ . C'est un polygone de sommets  $0, v_1, \dots, v_n$  (dans cet ordre), triangulé par des pétales du grand lotus, et le nombre de pétales arrivant au sommet  $v_k$  est égal à  $a_k$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

**Exemple 8.12.** — Dans la Figure 20 est dessiné le polygone triangulé correspondant à la suite admissible représentant 0 suivante :  $(2, 1, 3, 4, 1, 3, 1, 3)$ .

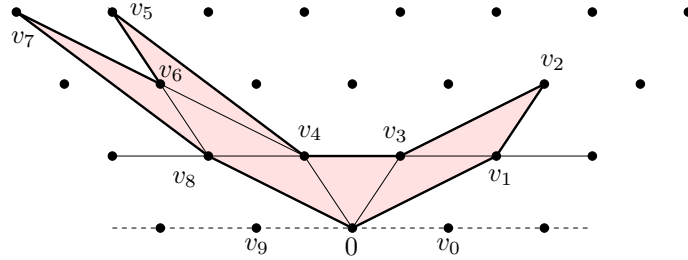


FIGURE 20. Polygone triangulé associé à une suite admissible représentant 0

**Remarque 8.13.** — La notion de suite admissible d'entiers a été introduite par Orlik et Wagreich [22]. Celles qui de plus représentent 0 sont réapparues naturellement dans les travaux [8] et [26] de Christophersen et Stevens sur la théorie des déformations des singularités quotient cycliques de surfaces. Ils montrent que ces suites correspondent bijectivement aux triangulations par des diagonales des polygones orientés ayant un point marqué et ils utilisent la combinatoire de la triangulation associée dans leurs calculs. Par ailleurs, après avoir écrit [23], j'ai été amené à me représenter ces suites par des suites de vecteurs, comme expliqué dans la Proposition 8.10. C'est à cette occasion que je me suis posé la question de savoir s'il n'y avait pas moyen de construire canoniquement un polygone ayant la bonne triangulation à partir de la suite de vecteurs.

## 9. Les lotus de dimension quelconque

Dans cette section j'étends la notion de lotus en dimension quelconque, j'explique à quelle généralisation des fractions continues cette construction donne lieu, et comment en déduire une mesure géométrique du contact des courbes monomiales.

Partons d'une base (non-ordonnée mais marquée par un ensemble  $I$ )  $\mathcal{B} := (e_i)_{i \in I}$  d'un réseau  $N$  de rang  $n \geq 2$ , où  $I$  est un ensemble de cardinal  $n$ . Définissons les polyèdres convexes fermés suivants :

- $\sigma(\mathcal{B})$  : le cône strictement convexe de  $N_{\mathbb{R}}$  engendré par cette base ;

- $\Delta_0(\mathcal{B})$  : l'enveloppe convexe de l'ensemble formé par 0 et  $\mathcal{B}$ ; c'est un simplexe  $n$ -dimensionnel;
- $\Delta(\mathcal{B})$  : l'enveloppe convexe de  $\mathcal{B}$ ; c'est un simplexe  $(n-1)$ -dimensionnel, unique facette de  $\Delta_0(\mathcal{B})$  ne contenant pas 0;
- $\Pi(\mathcal{B})$  : le parallélépipède engendré par  $\mathcal{B}$ ; ses sommets sont toutes les sommes de vecteurs disjoints parmi les vecteurs de  $\mathcal{B}$ ;
- $\tau(\mathcal{B}) := \overline{\Pi(\mathcal{B}) \setminus \Delta_0(\mathcal{B})}$ ; c'est le *pétale*  $n$ -dimensionnel associé à la base  $\mathcal{B}$ ;
- $\phi(i_1, \dots, i_n)$  : pour chaque arrangement  $(i_1, \dots, i_n)$  des éléments de l'ensemble  $I$ , le simplexe  $(n-1)$ -dimensionnel dont les sommets sont les éléments de la base :

$$(9.1) \quad \mathcal{B}(i_1, \dots, i_n) := (e_{i_1}, e_{i_1} + e_{i_2}, \dots, e_{i_1} + \dots + e_{i_n}).$$

Les simplexes  $\phi(i_1, \dots, i_n)$  sont contenus dans le bord de  $\tau(\mathcal{B})$ . Leur union avec  $\Delta(\mathcal{B})$  constitue exactement la partie de  $\partial\tau(\mathcal{B})$  visible sans écrasement à partir de l'origine. C'est-à-dire que, si on considère :

$$\psi : \sigma(\mathcal{B}) \setminus 0 \longrightarrow \Delta(\mathcal{B}),$$

la projection centrale sur le simplexe  $\Delta(\mathcal{B})$  dont les sommets sont les points de  $\mathcal{B}$ , alors toutes les autres faces maximales du bord du polytope  $\tau(\mathcal{B})$  sont écrasées par  $\psi$  en des polytopes de dimension strictement inférieure. Les images par  $\psi$  des simplexes  $\phi(i_1, \dots, i_n)$  constituent exactement la subdivision barycentrique de  $\Delta(\mathcal{B})$ .

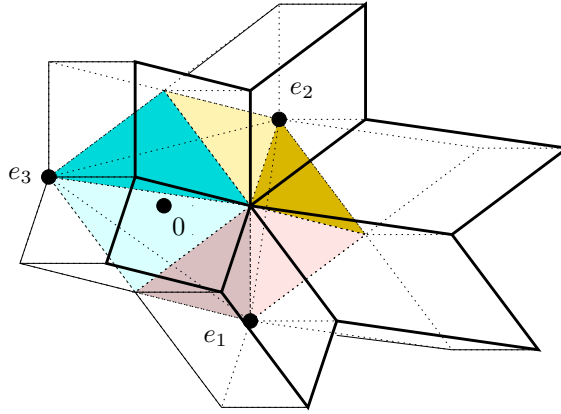


FIGURE 21. Les deux premières étapes de construction du lotus tridimensionnel

En partant de  $\tau(\mathcal{B})$  et des nouvelles bases  $\mathcal{B}(i_1, \dots, i_n)$ , on peut construire itérativement un complexe polyédral infini contenu dans le cône  $\sigma(\mathcal{B})$ . Plus précisément, lors de la première étape de la construction on construit  $\tau(\mathcal{B})$ . La deuxième étape de la construction consiste à rajouter tous les pétales  $\tau(\mathcal{B}(i_1, \dots, i_n))$  à  $\tau(\mathcal{B})$ ,  $(i_1, \dots, i_n)$  variant parmi les arrangements des éléments de  $I$ . Ces pétales ‘croissent’ à partir des simplexes  $\phi(i_1, \dots, i_n)$ , c’est pourquoi nous appelons

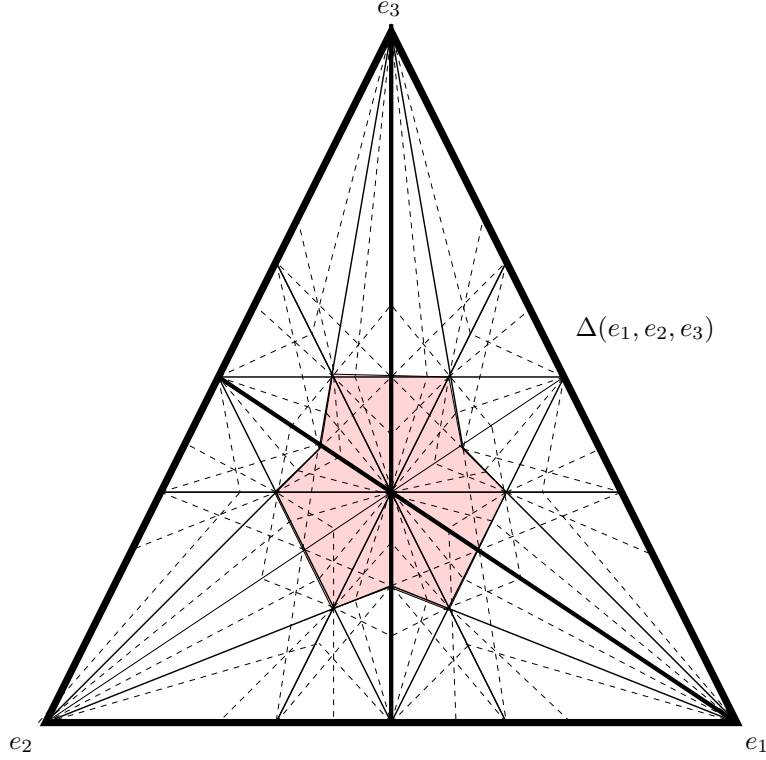


FIGURE 22. Le lotus tridimensionnel vu à partir de l'origine

ces derniers les *simplexes de croissance* de la deuxième étape de la construction. Remarquons que pour  $n \geq 3$ , ces simplexes de croissance ne sont pas des facettes du pétale  $\tau(\mathcal{B})$ , mais des demi-facettes. Ensuite on itère...

**Définition 9.2.** — Le complexe polyédral précédent est appelé **le lotus** de dimension  $n$  associé à la base  $\mathcal{B}$  du réseau  $N$ . On le notera  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ .

**Exemple 9.3.** — Dans la Figure 21 sont dessinés le pétale initial et les 6 pétales de la deuxième étape de construction. Sont coloriés les simplexes de croissance. Dans la Figure 22 sont dessinés les pétales des quatre premières étapes de la construction du lotus, tels que vus à partir de l'origine. C'est-à-dire que sont dessinées les images par  $\psi$  des simplexes de croissance de ces pétales. Est coloriée la projection de l'union des faces des pétales de la deuxième étape de construction dont les arêtes sont indiquées en traits gras dans la Figure 21.

Le lotus  $n$ -dimensionnel permet de généraliser en dimension quelconque l'interprétation géométrique donnée dans la Proposition 8.7, 2) des fractions continues usuelles. En effet, la notion de *gaine* s'étend en toutes dimensions :

**Définition 9.4.** — Un **sous-pétale** est une face latérale d'un pétale, c'est-à-dire une face restreinte à laquelle  $\psi$  n'est pas un homéomorphisme sur son image. Soit  $l \subset N_{\mathbb{R}}$  une demi-droite d'origine 0, contenue dans l'intérieur du cône  $\sigma(\mathcal{B})$ . Sa **gaine**  $G(l)$  est par définition l'union des pétales et sous-pétales du lotus  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  dont les intérieurs intersectent  $l$ .

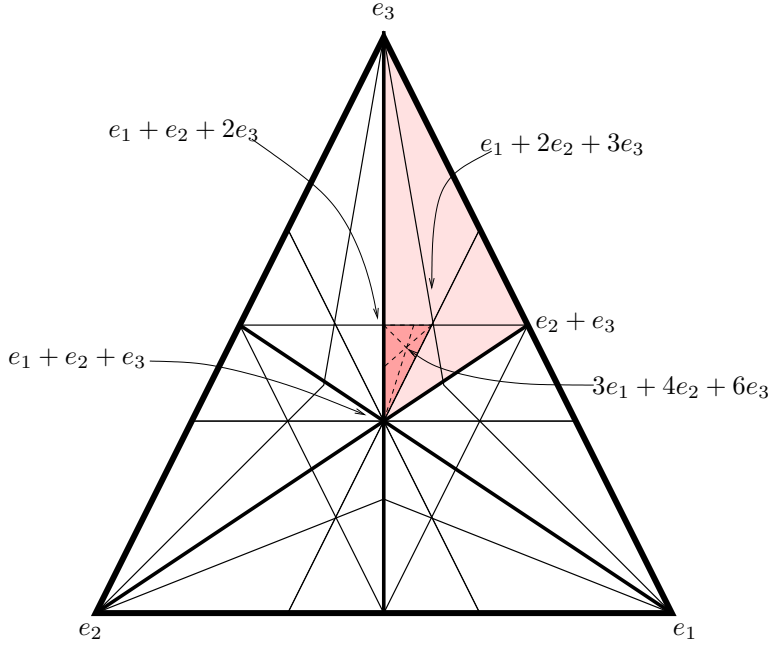


FIGURE 23. Une gaine tridimensionnelle vue à partir de l'origine

On peut à nouveau associer à  $G(l)$  la suite des sous-pétales que l'on rencontre en s'éloignant de 0 le long de  $l$ . La suite des dimensions de ces sous-pétales est décroissante. Pour  $n = 2$  elle est constante, mais dès  $n = 3$  elle ne l'est plus nécessairement : il y a une sous-suite initiale de pétales de dimension  $n$ , suivie d'une sous-suite de sous-pétales de dimension  $n - 1$ , puis une autre de dimension  $n - 2$ , etc.

Notons par  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$  la suite des pétales de dimension  $n$  de la gaine  $G(l)$  et par  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$  la suite des simplexes de croissance associés. Grâce à la formule (9.1), on peut paramétrer cette suite par une suite d'arrangements  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  des éléments de l'ensemble  $I$ , étendant le fait que l'on paramètre  $\tau(\mathcal{B}(i_1, \dots, i_n))$  par l'arrangement  $(i_1, \dots, i_n)$ . Géométriquement, cela correspond au fait qu'étant donné un simplexe de dimension  $n$  de la subdivision barycentrique de  $\Delta(\mathcal{B})$ , il admet un unique sommet en commun avec  $\Delta(\mathcal{B})$ , et plus généralement, pour chaque  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ , une unique face de dimension  $k$  contenue dans une face de dimension  $k$  de  $\Delta(\mathcal{B})$ . Ainsi,  $\alpha_k$  est l'arrangement correspondant au simplexe de croissance de  $\tau_{k+1}$ . Cette



paramétrisation étend en dimension plus grande l'association d'une suite de symboles  $\delta$  et  $\gamma$  à une demi-droite  $l \subset \sigma(\mathcal{B})$  faite en dimension 2 (voir le paragraphe qui précède l'Exemple 8.6). En effet, dans ce cas, si  $I = \{1, 2\}$ , le symbole  $\delta$  correspond à l'arrangement  $(1, 2)$  et  $\gamma$  à l'arrangement  $(2, 1)$ .

**Exemple 9.5.** — Dans la Figure 23 est représentée la vue à partir de 0 (c'est-à-dire son image par la projection  $\psi$ ) de la gaine de la demi-droite rationnelle  $\mathbb{R}_+(3e_1 + 4e_2 + 6e_3)$ . Cette gaine est composée de trois pétales, paramétrés par la suite  $(3, 2, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 2)$  d'arrangements des éléments de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .

Chaque fois que la dimension des sous-pétales constituant la gaine baisse, on obtient des suites d'arrangements d'éléments d'un ensemble de cardinal plus petit que celui qui précédait. De cette manière, la notion de *fraction continue* associée à une demi-droite rationnelle de  $\sigma(e_1, e_2)$  se retrouve remplacée en dimension plus grande par une notion d'*arrangements continus*.

Pour finir, je voudrais mentionner une application de la notion de gaine à la théorie des singularités. Une *courbe monomiale* de  $\mathbb{C}^n$  est une courbe définie par une paramétrisation de la forme  $t \rightarrow (t^{m_1}, \dots, t^{m_n})$ . Appelons  $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$  son *exposant*. On peut représenter géométriquement le *contact* de deux courbes monomiales à l'aide de la partie initiale commune des gaines de leurs exposants. Ce contact peut aussi être représenté symboliquement en associant à la suite des pétales de cette partie initiale commune la suite correspondante d'arrangements.

## Références

- [1] Arnold, V.I. *Higher dimensional continued fractions*. Regular and chaotic dynamics **3**, 3 (1998), 10-17.
- [2] Brieskorn, E., Knörrer, H. *Plane algebraic curves*. Translated from the German by John Stillwell. Birkhäuser Verlag, 1986.
- [3] Campillo, A., Castellanos, J. *Curve singularities. An algebraic and geometric approach*. Hermann, 2005.
- [4] Campillo, A., Gonzalez-Sprinberg, G., Lejeune-Jalabert, M. *Amas, idéaux à support fini et chaînes toriques*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315** (1992), no. 9, 987-990.
- [5] Campillo, A., Gonzalez-Sprinberg, G., Lejeune-Jalabert, M. *Clusters of infinitely near points*. Math. Ann. **306** (1996), no. 1, 169-194.
- [6] Campillo, A., Gonzalez-Sprinberg, G., Monserrat, F. *Configurations of infinitely near points*. A paraître dans São Paulo Journ. Math. Sciences.
- [7] Casas-Alvero, E. *Singularities of plane curves*. Cambridge Univ. Press, 2000.
- [8] Christophersen, J. A. *On the components and discriminant of the versal base space of cyclic quotient singularities*. Dans *Singularity theory and its applications*, Part I (Coventry, 1988/1989), LNM **1462**, Springer-Verlag, 1991, 81-92.
- [9] Du Val, P. *Reducible exceptional curves*. Amer. J. Math. **58** (1936), 285-289.
- [10] Enriques, F., Chisini, O. *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Libro II, Zanichelli, 1918.
- [11] Favre, C., Jonsson, M. *The valuative tree*. LNM **1853**. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [12] García Barroso, E., Popescu-Pampu, P. *The kite of a plane curve singularity*. En préparation.

- [13] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O. *Concrete Mathematics*. Second Edition, Addison-Wesley, 1994.
- [14] Hatcher, A., Thurston, W. *Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements*. Invent. Math. **79** (1985), 225-246.
- [15] Hironaka, H. *La voûte étoilée*. Dans *Singularités à Cargèse*. Astérisque **7-8**, SMF, 1973.
- [16] Hirzebruch, F. *The topology of normal singularities of an algebraic surface*. Sémin. Bourbaki **250** (1962/63).
- [17] Honda, K. *On the classification of tight contact structures I*. Geometry & Topology **4** (2000), 309-368.
- [18] Klein, F. *Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbuchentwicklung*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. **3** (1895), 357-359. French translation : *Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire*. Nouvelles Annales de Mathématiques (3) **15** (1896), 327-331.
- [19] Lejeune-Jalabert, M. *Linear systems with infinitely near base conditions and complete ideals in dimension two*. Dans *Singularity theory*. Trieste, 1991. D. T. Lê, K. Saito, B. Teissier eds., World Scientific, 1995, 345-369.
- [20] Mumford, D. *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **9** (1961) 5-22.
- [21] Noether, M. *Über die singularen Werthsysteme einer algebraischen Function und die singularen Punkte einer algebraischen Curve*. Math. Annalen **9** (1875), 166-182.
- [22] Orlik, P., Wagreich, P. *Algebraic surfaces with  $k^*$  action*. Acta Math. **138** (1977), 43-81.
- [23] Popescu-Pampu, P. *The geometry of continued fractions and the topology of surface singularities*. Dans *Singularities in Geometry and Topology 2004*. Advanced Studies in Pure Mathematics **46**, 2007, 119-195.
- [24] Series, C. *Non-euclidean geometry, continued fractions and ergodic theory*. Math. Intelligencer **4** (1982) 1, 24-31.
- [25] Series, C. *The modular surface and continued fractions*. J. London Math. Soc. (2) **31** (1985), 69-80.
- [26] Stevens, J. *On the versal deformation of cyclic quotient singularities*. In *Singularity theory and its applications*. Part 1 (Coventry, 1988/1989), LNM **1462**, Springer-Verlag, 1991, 302-319.
- [27] Wall, C. T. C. *Singular points of plane curves*. London Mathematical Society Student Texts, **63**. Cambridge University Press, 2004.
- [28] Zariski, O. *Polynomial ideals defined by infinitely near base points*. Amer. J. Math. **60** (1938), 151-204.

---

16 Juin 2009.

PATRICK POPESCU-PAMPU, Univ. Paris 7 Denis Diderot, Inst. de Maths.-UMR CNRS 7586, équipe "Géométrie et dynamique", Site Chevaleret, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13, France.

*E-mail* : ppopescu@math.jussieu.fr